Examen partiel du 20 octobre 2000

Durée : deux heures
Aucun document - Calculatrice interdite.
On rédigera les trois exercices sur trois feuilles différentes.

Exercice 1

Soit
$$E = \left\{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \,/, \quad \exists u, v \in \mathbb{C}, \quad M = \begin{pmatrix} u & v \\ -\overline{v} & \overline{u} \end{pmatrix} \right\}.$$
On munit l'ensemble E de la somme et du produit matriciels.

1) Montrer que E contient I et que, pour toute matrice M et M' de E, $M - M'$ et MM' appartiennent à E.

2) Que peut on en déduire sur la nature algébrique de $(E, +, \times)$?

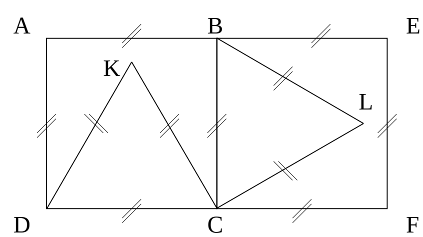
3) Montrer que $(E, +, \times)$ est un corps.

4) $(E, +, \times)$ est-il un corps commutatif ?

Exercice 2

1) Si a, b et c sont les affixes de trois points deux à deux distincts du plan complexe, montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que ces trois points soient alignés est
$$\mathrm{Im}\left(\frac{b-a}{c-a}\right) = 0.$$

2) Sur la figure ci-dessous, $ABCD$ et $BEFC$ sont deux carrés et CDK et BLC sont deux triangles équilatéraux.



Montrer que A, K et L sont alignés. Pour cela, on considérera un repère orthonormé $\mathcal{R} = \left(O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}\right)$ tel que
$$O = D, \quad \overrightarrow{I} = \overrightarrow{DC}, \quad \overrightarrow{J} = \overrightarrow{DA},$$

et on calculera les affixes des points de la figure par rapport à ce repère.

Les deux questions qui suivent sont relatives à deux autres démonstrations de cette même propriété en utilisant des notions plus simples ; par conséquent, elles constituent un bonus et ne sont pas obligatoires.

3) Faire une démonstration purement géométrique de ce résultat : on considérera une rotation simple dont les antécédents de K et L soient connus. On notera X l'antécédent de A et on montrera que les antécédents de K, L et A sont alignés.
4) Faire une autre démonstration qui repose sur les angles : on calculera, de façon purement géométrique, les angles $\left(\widehat{\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KD}}\right)$ $\left(\widehat{\overrightarrow{KD}, \overrightarrow{KC}}\right)$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{KC}, \overrightarrow{KL}}\right)$ ainsi que leur somme.

Exercice 3

1) Soit $\mathcal{P}(n)$, une propriété définie pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que, si

$$\begin{cases} \mathcal{P}(0) \text{ est vraie,} \\ \mathcal{P}(1) \text{ est vraie,} \\ \forall n \geq 2, \quad \big(\mathcal{P}(n-2),\, \mathcal{P}(n-1) \Longrightarrow \mathcal{P}(n)\big), \end{cases}$$

alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
2) Montrer qu'il existe une unique suite d'entiers $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \quad \text{pour tout } n \geq 2, \quad u_n = u_{n-1} + u_{n-2}.$$

3) Montrer, que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{1}{2^n\sqrt{5}}\left(\left(1+\sqrt{5}\right)^n - \left(1-\sqrt{5}\right)^n\right)$$

4) Pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression

$$\frac{1}{2^n\sqrt{5}}\left(\left(1+\sqrt{5}\right)^n - \left(1-\sqrt{5}\right)^n\right)$$

appartient elle à $\mathbb{N}$?
5) On définit l'unique suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$u_0 = 10, \quad u_1 = 24, \quad u_2 = 62, \quad \text{pour tout } n \geq 3, \quad u_n = 6u_{n-1} - 11u_{n-2} + 6u_{n-3}.$$

Montrer, que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = 1 + 4 \times 2^n + 5 \times 3^n.$$