cours de MT12 Printemps 2001

chapitre 5

CALCULS DE PRIMITIVES

1. Primitives de fractions rationnelles

On rappelle que toute fraction rationnelle P se décompose dans $\mathbb{R}[X]$ sous la forme

$$P = E + \sum_k \frac{A_k}{(X-a_k)^{\alpha_k}} + \sum_k \frac{A_k X + B_k}{(X^2+b_k X + c_k)^{\beta_k}},$$

où la partie entière E appartient à $\mathbb{R}[X]$, le deuxième terme correspond aux éléments de première espèce, et le troisème terme correspond aux éléments de seconde espèce (avec $X^2+b_kX+c_k$ irréductible dans $\mathbb{R}[X]$).

1.1. Cacul des éléments de première espèce

Une primitive de $1/(X-a)^\alpha$ est

$$\frac{(X-a)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \text{ si } \alpha \neq 1, \quad \ln|X-a| \text{ si } \alpha = 1.$$

1.2. Cacul des éléments de seconde espèce

On met le dénominateur de l'élément de seconde espèce sous sa forme canonique

$$X^2 + bX + c = (X-p)^2 + q^2,$$

où $q > 0$ et on écrit

$$\int \frac{AX+B}{(X^2+bX+c)^\beta} dX = A \int \frac{X-p\,dX}{\big((X-p)^2+q^2\big)^\beta} + (B+Ap)\int \frac{dX}{\big((X-p)^2+q^2\big)^\beta}.$$

1.2.1. Cacul du premier terme. En écrivant $X-p = \big((X-p)^2+q^2\big)'/2$, il vient

$$\boxed{\int \frac{X-p}{\big((X-p)^2+q\big)^\beta} dX = \begin{cases} \dfrac{1}{2(-\beta+1)}\big((X-p)^2+q^2\big)^{-\beta+1}, & \text{si } \beta \neq 1, \\[2ex] \dfrac{1}{2}\ln\big|(X-p)^2+q^2\big|, & \text{si } \beta = 1. \end{cases}}$$

1.2.2. Cacul du second terme. En posant

$$u = q^{-1}(X - p),$$

il vient $q^2u^2 = (t-p)^2$ et donc

$$\int \frac{dX}{\big((X-p)^2 + q^2\big)^\beta} = q^{1-2\alpha} \int \frac{du}{(u^2+1)^\alpha}.$$

Pour calculer ce terme, on a deux méthodes (il ne faudra pas oublier d'exprimer, à la fin, u en fonction de X)

Première méthode (pour α inférieur ou égal à 3)

On pose

$$u = \operatorname{tg} \phi,$$

On a donc

$$\phi = \text{Arc tg}\, u \text{ et } d\,\phi = \frac{du}{1+u^2}.$$

Ainsi, compte tenu de

$$\cos^2 \phi = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \phi} = \frac{1}{1+u^2},$$

on a

$$\boxed{\int \frac{du}{(u^2+1)^\alpha} = \int \cos^{2(\alpha-1)} \phi \, d\phi.}$$

Cette fonction se calcule comme indiqué dans la section 2.1

Seconde méthode (pour α supérieur à 4)

On pose

$$F_\alpha(u) = \int \frac{du}{(u^2+1)^\alpha}.$$

Par intégration par partie, il vient avec

$$\begin{array}{ll} U = \dfrac{1}{(u^2+1)^\alpha} & U' = -\dfrac{\alpha}{(u^2+1)^{\alpha+1}} \\ & \\ V' = 1 & V = u \end{array}$$

$$\boxed{2\alpha F_{\alpha+1}(u) = \frac{u}{(u^2+1)^\alpha} + (2\alpha - 1) F_\alpha(u).}$$

On peut conclure en initialisant cette relation de réccurence par

$$\boxed{F_1(u) = \text{Arc tg}\, u + k,}$$

où k est une constante.

Exemple 1.1. Calculons

$$H(t) = \int \frac{1-t}{(t^2+t+1)^2} dt.$$

On peut écrire

$$H(t) = -\frac{1}{2} \int (t^2+t+1)'(t^2+t+1)^{-2} dt + \frac{3}{2} \int \frac{dt}{(t^2+t+1)^2}. \tag{1.1}$$

Le premier terme de (1.1) est égal à

$$\frac{1}{2}(t^2+t+1)^{-1}.$$

On écrit le dénominateur du second terme de (1.1) sous sa forme canonique :

$$\frac{3}{2}\int \frac{dt}{(t^2+t+1)^2} = \frac{3}{2}\int \frac{dt}{\left(\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)^2}.$$

On fait le changement de variable

$$u = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-1}\left(t+\frac{1}{2}\right). \tag{1.2}$$

D'où

$$dt = \frac{\sqrt{3}}{2}du,$$

et le second terme de (1.1) est égal à

$$G(t) = \frac{3}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{du}{\left(\frac{3}{4}\right)^2(u^2+1)^2} = \frac{4\sqrt{3}}{3}\int \frac{du}{(u^2+1)^2}.$$

En posant

$$u = \operatorname{tg}\phi, \tag{1.3}$$

on a

$$du = \left(1+\operatorname{tg}^2\phi\right)d\phi,$$

et

$$G(t) = \frac{4\sqrt{3}}{3}\int \frac{d\phi}{1+\operatorname{tg}^2\phi} = \frac{4\sqrt{3}}{3}\int \cos^2\phi d\phi.$$

Par linéarisation, il vient

$$G(t) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\int (1+\cos 2\phi)d\phi = \frac{2\sqrt{3}}{3}\phi + \frac{\sqrt{3}}{3}\sin 2\phi.$$

Il faut revenir à la variable u (avec (1.3)) puis à la variable t (avec (1.2)). On pourrait donc écrire, selon (1.3), $\phi = \text{Arc tg}\, u$, d'où

$$G(t) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\text{Arc tg}\, u + \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\left(2\text{Arc tg}\, u\right).$$

Cependant, il est plus simple de remarquer que

$$\sin 2\phi = \frac{2\operatorname{tg}\phi}{1+\operatorname{tg}^2\phi} = \frac{2u}{1+u^2}.$$

Il vient

$$G(t) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\text{Arc tg}\, u + \frac{2\sqrt{3}}{3}\frac{u}{1+u^2}.$$

D'après (1.2), on a

$$u = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-1}\left(t+\frac{1}{2}\right)$$

et donc

$$G(t) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\text{Arc tg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2t+1)\right) + \frac{1}{2}\frac{2t+1}{t^2+t+1}.$$

Bref, on a

$$\boxed{H(t) = \frac{t+1}{t^2+t+1} + \frac{2\sqrt{3}}{3}\text{Arc tg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2t+1)\right) + k.}$$

2. Primitives de fractions rationnelles de sinus et cosinus

Soit $R \in \mathbb{R}(X,Y)$ une fraction rationnelle à deux variables (c'est-à-dire, le rapport de deux polynômes à deux variables). On cherche des primitives de $f(t) = R(\cos t, \sin t)$.

Par exemple, si

$$R(X,Y) = \frac{3XY + 3X^2 + Y^4}{X + X^5Y^7},$$

alors

$$f(t) = \frac{3\cos t\sin t + 3\cos^2 t + \sin^4 t}{\cos t + \cos^5 t\,\sin^7 t}.$$

2.1. $R(X,Y)$ est un polynôme

Par linéarité, on se ramène au cas où

$$f(t) = \sin^p t\,\cos^q t,$$

où $p, q \in \mathbb{N}$.
Premier cas : si p (resp. q) est impair, le changement de variable

$$x = \cos t \text{ (resp. } x = \sin t),$$

nous ramène à chercher des primitives d'un polynôme.
Second cas : si p et q sont pairs, on linéarise en passant par les complexes.

Exemple 2.1. Calculons

$$F(t) = \int \sin^3 t\,\cos^4 t\,dt.$$

Si on pose $x = \cos t$, on a $dx = -\sin t\,dt$; ainsi

$$F(t) = \int \cos^4 t\,\sin^2 t\,\sin t\,dt = \int \cos^4 t\,\left(1-\cos^2 t\right)\,\sin t\,dt == -\int x^4\left(1-x^2\right)dx = \frac{x^7}{7} - \frac{x^5}{5} + k.$$

Donc, en revenant à la variable t

$$\boxed{F(t) = \frac{\cos^7 t}{7} - \frac{\cos^5 t}{5} + k.}$$

Exemple 2.2. Calculons

$$F(t) = \int \sin^2 t\,\cos^4 t\,dt.$$

On linéarise simultanément $\sin^2 t$ et $\cos^4 t$ en utilisant les formules d'Euler :

$$\sin^2 t = \left(\frac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right)\right)^2 = -\frac{1}{2^2}\left(e^{2it} - 2 + e^{-2it}\right).$$

et

$$\cos^4 t = \left(\frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right)\right)^4 = \frac{1}{2^4}\left(e^{4it} + 4e^{2it} + 6 + 4e^{-2it} + e^{-4it}\right).$$

En multipliant ces deux expressions, il vient

$$\sin^2 t \, \cos^4 t = -\frac{1}{2^6}\left(e^{6it} + e^{-6it} + 2e^{4it} + 2e^{-4it} - e^{2it} - e^{-2it} - 4\right),$$

et donc, en réutilisant les formules d'Euler,

$$\sin^2 t \, \cos^4 t = -\frac{1}{2^5}\left(\cos 6t + 2\cos 4t - \cos 2t - 2\right).$$

Par intégration, il vient donc

$$\boxed{F(t) = -\frac{\sin 6t}{192} - \frac{\sin 4t}{64} + \frac{\sin 2t}{64} + \frac{t}{16} + k.}$$

2.2. $R(X,Y)$ n'est pas un polynôme

2.2.1. Méthode générale. On considère la nouvelle variable

$$u = \tan\left(\frac{t}{2}\right).$$

Attention, cette formule est valable sur tout intervalle $]2m\pi - \pi, 2m\pi + \pi[$ où $m \in \mathbb{Z}$ et ce calcul fournira des primitives défines *a priori* sur $]2m\pi - \pi, 2m\pi + \pi[$. On utilise les formules de trigonométrie qui permettent d'exprimer le sinus et le cosinus d'un angle en fonction de la tangente de l'arc moitié

$$\cos t = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \tag{2.1}$$

$$\sin t = \frac{2u}{1+u^2}. \tag{2.2}$$

En exprimant u en fonction de t, il vient

$$2\arctan u = t - 2m\pi \tag{2.3}$$

et

$$dt = \frac{2du}{1+u^2}. \tag{2.4}$$

Ainsi, d'après (2.1), (2.2) et (2.4), on se ramène au calcul d'une primitive d'une fraction rationnelle puisque

$$\boxed{\int f(t)\,dt = \int R\left(\cos t, \sin t\right)\,dt = \int R\left(\frac{1-u^2}{1+u^2}, \frac{2u}{1+u^2}\right)\frac{2du}{1+u^2}.}$$

Nous donnons un exemple juste après.

2.2.2. Changement de variable simplificateurs (règles de Bioche).

si f est impaire, on pose $u = \cos t$.
si $f(\pi - t) = -f(t)$, on pose $u = \sin t$.
si $f(\pi + t) = f(t)$, on pose $u = \tan t$.

Avant d'appliquer la méthode générale, il faut toujours regarder si l'on peut d'abord appliquer l'une des trois règles de Bioche.

Exemple 2.3. On calcule
$$F(t) = \int \frac{dt}{2+\sin t}.$$
Aucune des règles de Bioche n'est applicable et, d'après la méthode générale, on pose $u = \tan t/2$; ainsi,
$$F(t) = \int \frac{1}{2+\frac{2u}{1+u^2}} \frac{2du}{1+u^2} = \int \frac{du}{u^2+u+1}.$$
Conformément à la méthode de calcul de primitives de fractions rationnelles, on écrit le dénominateur sous sa forme canonique
$$u^2+u+1 = \left(u+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4},$$
et on pose
$$v = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-1}\left(u+\frac{1}{2}\right).$$
On a donc
$$du = \frac{\sqrt{3}}{2} dv$$
et
$$F(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{dv}{\frac{3}{4}\left(v^2+1\right)} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\int \frac{dv}{v^2+1} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan v + k.$$
En revenant à la variable u, on a
$$F(t) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(u+\frac{1}{2}\right)\right) + k,$$
et, en revenant à la variable t, on a
$$\boxed{F(t) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\tan\left(\frac{t}{2}\right)+\frac{1}{2}\right)\right) + k.}$$

Exemple 2.4. On calcule
$$F(t) = \int \frac{\cos^3 t}{\sin^5 t} dt.$$
D'après la deuxième règle de Bioche ($f(\pi - t) = -f(t)$), on pose $u = \sin t$. On a donc
$$F(t) = \int \frac{1-u^2}{u^5} du = \int \frac{du}{u^5} - \int \frac{du}{u^3} = -\frac{1}{4u^4} + \frac{1}{2u^2} + k' = -\frac{1}{4\sin^4 t} + \frac{1}{2\sin^2 t} + k'.$$
On peut simplifier cette expression :
$$F(t) = -\frac{1-2\sin^2 t}{4\sin^4 t} + k' = -\frac{1-2\sin^2 t+\sin^4 t}{4\sin^4 t} + k,$$
où k est une autre constante réelle. Ainsi,
$$F(t) = -\frac{\left(1-\sin^2 t\right)^2}{4\sin^4 t} + k$$
Et donc
$$\boxed{F(t) = -\frac{1}{4}\mathrm{cotan}^4\, t + k.}$$

3. Primitives de fractions rationnelles de sinus et cosinus hyperboliques

3.1. $R(X,Y)$ est un polynôme

Soit $R \in \mathbb{R}(X,Y)$ une fraction rationnelle à deux variables. On cherche des primitives de $f(t) = R(\text{ch } t, \text{sh } t)$.

Par linéarité, on se ramène au cas où

$$f(t) = \text{sh}^p t \,\text{ch}^q t,$$

où $p, q \in \mathbb{N}$. La méthode est identique au cas de la trigométrie circulaire (cf. section 2.1) :
Premier cas : si p (resp. q) est impair, le changement de variable

$$x = \text{ch } t \text{ (resp. } x = \text{sh } t\text{)},$$

nous ramène à chercher des primitives d'un polynôme.
Second cas : si p et q sont pairs, on linéarise en remplaçant sh et ch par leurs expressions en fonction de l'exponentielle.

3.2. $R(X,Y)$ n'est pas un polynôme

Les règles de Bioche ne fonctionnent pas ; mais la méthode de la section 2.2.1 demeure valable :

On considère la nouvelle variable

$$u = \text{th } \left(\frac{t}{2}\right).$$

Attention, cette formule est maintenant valable sur $\mathbb{R}$. On utilise les formules de trigonométrie hyperbolique qui permettent d'exprimer le sinushyperbolique et le cosinus hyperbolique d'un angle en fonction de la tangente hyperbolique de l'arc moitié

$$\text{ch } t = \frac{1+u^2}{1-u^2}, \tag{3.1}$$

$$\text{sh } t = \frac{2u}{1-u^2}. \tag{3.2}$$

$$dt = \frac{2du}{1-u^2}. \tag{3.3}$$

Ainsi, d'après (3.1), (3.2) et (3.3), on se ramène au calcul d'une primitive d'une fraction rationnelle puisque

$$\boxed{\int f(t)\,dt = \int R\,(\text{ch } t, \text{sh } t)\ dt = \int R\left(\frac{1+u^2}{1-u^2}, \frac{2u}{1-u^2}\right)\ \frac{2du}{1-u^2}}.$$

On peut aussi se ramener au calcul d'une primitive d'une fraction rationnelle en considérant la nouvelle variable

$$x = e^t.$$

Ainsi

$$dx = e^t dt,$$

et

$$\boxed{\int f(t)\,dt = \int R_1(e^t)\,dt = \int R_1(x)\,\frac{dx}{x},}$$

où R_1 est une fraction rationnelle.

Exemple 3.1. Calculons
$$F(t) = \int \frac{dt}{\text{sh } t},$$
en posant $u = \text{th } (t/2)$:
$$F(t) = \int \frac{1-u^2}{2u} \frac{2du}{1-u^2} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + k.$$
Ainsi
$$F(t) = \ln|\text{th } (t/2)| + k.$$

Exemple 3.2. Calculons
$$F(t) = \int \frac{dt}{\text{sh}^3 t + \text{ch}^3 t - 1}.$$
On exprime les lignes trigonométriques en fonction de l'exponentielle :
$$F(t) = \int \frac{dt}{\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^3 + \left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^3 - 1} = 4\int \frac{dt}{e^{3t}+3e^{-t}-4} = 4\int \frac{e^t\,dt}{e^{4t}-4e^t+3}.$$
On pose $x = e^t$. Ainsi,
$$F(t) = \int \frac{dx}{x^4-4x+3}.$$
On factorise le dénominateur sous la forme irréductible
$$x^4 - 4x + 3 = (x-1)^2\big(x^2+2x+3\big)$$
et on décompose en éléments simples. Tous calculs faits, on obtient :
$$\boxed{F(t) = -\frac{2}{3}\,\frac{1}{e^t-1} + \frac{2}{9}\ln\left(\frac{e^{2t}+2e^t+3}{(e^t-1)^2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{9}\arctan\left(\frac{e^t+1}{\sqrt{2}}\right) + k.}$$

4. Intégrales abéliennes

Soit une fraction rationnelle $R \in \mathbb{R}(X,Y)$. Nous montrons dans cette section deux types de calculs de primitives ; dans la section 4.1, nous étudierons les primitives de fonctions où intervient la racine n-ième d'une fonction homographique et dans la section 4.2, nous étudierons les primitives de fonctions où intervient la racine d'un trinôme du second degré.

4.1. Fonction en racine n-ième d'une fonction homographique

Nous cherchons à déterminer
$$F(x) = \int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx,$$
où n est un entier naturel non nul et a, b, c, et d sont des réels tels que $ad - bc \neq 0$ (si $ad - bc = 0$, alors la fonction $x \mapsto (ax+b)/(cx+d)$ est constante).

On pose
$$y = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}.$$
Ainsi
$$y^n cx + y^n d = ax + b,$$

et
$$x = \frac{-y^n d + b}{y^n c - a}.$$
On a alors
$$dx = \frac{ny^{n-1}}{(cy^n - a)^2}(ad - bc)dy.$$
On est ramené au cas d'une primitive d'une fraction rationnelle puisque
$$\boxed{F(x) = (ad - bc) \int R\left(\frac{-y^n d + b}{y^n c - a}, y\right) \frac{ny^{n-1}}{(cy^n - a)^2}\, dy.}$$

Exemple 4.1. Soit à calculer
$$F(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}.$$
En remarquant que
$$\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = \frac{1}{\left(x^{\frac{1}{6}}\right)^3 + \left(x^{\frac{1}{6}}\right)^2},$$
on pose
$$y = \sqrt[6]{x}.$$
Ainsi
$$x = y^6 \text{ et } dx = 6y^5 dy.$$
D'où
$$F(x) = \int \frac{6y^5 dy}{y^3 + y^2} = 6 \int \frac{y^3 dy}{y + 1}.$$
Après réduction en éléments simples, il vient
$$\boxed{F(x) = 6\left(\frac{\sqrt{x}}{3} - \frac{\sqrt[3]{x}}{2} + \sqrt[6]{x} - \ln\left(1 + \sqrt[6]{x}\right)\right) + k.}$$

4.2. Fonction en racine carré d'un trinôme du second degré

Nous cherchons à déterminer
$$F(x) = \int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx,$$
où a, b et c sont trois réels tels que $a \neq 0$ (sinon, on se ramène au cas précédent avec $n = 2$). On considère le discriminant
$$\Delta = b^2 - 4ac.$$
Premier cas : $a < 0$.

Dans ce cas $\Delta > 0$ (sinon, $ax^2 + bx + c$ n'est positif que sur un singleton ou l'ensemble vide et, dans ce cas, F n'est pas définie). Ainsi, ilexiste $\alpha < \beta$ tels que
$$ax^2 + bx + c = (-a)(x - \alpha)(\beta - x).$$

On considère la nouvelle variable t définie par
$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - \alpha).$$

Si $x \in]\alpha, \beta[$, alors $t \in \mathbb{R}_+$. On a

$$x = \frac{\alpha t^2 - a\beta}{t^2 - a},$$

et, après calculs,

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = a\frac{(\alpha - \beta)t}{t^2 - a} \text{ et } dx = -2a\frac{\alpha - \beta}{(t^2 - a)^2}dt.$$

On est ramené au cas d'une primitive d'une fraction rationnelle puisque

$$\boxed{F(x) = -2a(\alpha - \beta)\int R\left(\frac{\alpha t^2 - a\beta}{t^2 - a}, a\frac{(\alpha - \beta)t}{t^2 - a}\right)\frac{1}{(t^2 - a)^2}dt.}$$

Exemple 4.2. Calculons

$$F(x) = \int \frac{x}{(-2x^2 + x + 1)^{\frac{3}{2}}}\, dx.$$

On a

$$-2x^2 + x + 1 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(1 - x).$$

On travaille donc sur l'intervalle $] - 1/2, 1[$. On pose

$$\sqrt{-2x^2 + x + 1} = t\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

Ainsi, après calculs,

$$x = \frac{2 - \frac{t^2}{2}}{t^2 + 2}.$$

et

$$\boxed{F(x) = \frac{2}{9}\frac{x + 2}{\sqrt{-2x^2 + x + 1}} + k.}$$

Deuxième cas : $a > 0$ et $\Delta < 0$.

On considère la nouvelle variable t définie par

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = x\sqrt{a} + t \text{ ou } - x\sqrt{a} + t.$$

On se ramène alors au calcul d'une primitive d'une fraction rationnelle.

Exemple 4.3. Calculons

$$F(x) = \int \frac{dx}{\left(x + \sqrt{x^2 + x + 1}\right)^2}.$$

On considère la nouvelle variable t définie par

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = -x + t.$$

On a alors

$$x = \frac{t^2 - 1}{2t + 1} \text{ et } dx = 2\frac{t^2 + t + 1}{(2t + 1)^2}dt.$$

Il vient donc

$$F(x) = 2\int \frac{t^2 + t + 1}{t^2(2t + 1)^2}\, dt.$$

La fraction rationnelle à intégrer se décompose en éléments simples sous la forme

$$\frac{t^2+t+1}{t^2(2t+1)^2} = \frac{\alpha}{t} + \frac{\beta}{t^2} + \frac{\gamma}{2t+1} + \frac{\delta}{(2t+1)^2}.$$

Après calculs, il vient

$$\frac{t^2+t+1}{t^2(2t+1)^2} = -\frac{3}{t} + \frac{1}{t^2} + \frac{6}{2t+1} + \frac{3}{(2t+1)^2}.$$

Par intégration,

$$\begin{aligned} F(x) &= -3\ln|t| - \frac{1}{t} + 3\ln|2t+1| - \frac{3}{2}\,\frac{1}{2t+1}, \\ &= 3\ln\left|2+\frac{1}{t}\right| - \frac{1}{2}\,\frac{3t+2}{t(2t+1)}. \end{aligned}$$

En revenant à la variable initiale x selon

$$t = \sqrt{x^2+x+1} + x,$$

il vient

$$\boxed{F(x) = 3\ln\left|2+\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}\right| - \frac{1}{2}\,\frac{3\sqrt{x^2+x+1}+3x+2}{\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)\left(2\sqrt{x^2+x+1}+2x+1\right)}.}$$

Troisième cas : $a > 0$ et $\Delta > 0$.

On considère la nouvelle variable t définie par

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = x\sqrt{a} + t \text{ ou } -x\sqrt{a} + t.$$

Exemple 4.4.

$$\boxed{\int \left(x^2+6x+5\right)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{1}{4}(x+3)\left(x^2+6x-1\right)\sqrt{x^2+6x+5} + 6\ln\left|x+3+\sqrt{x^2+6x+5}\right| + k.}$$