MT12 Printemps 2001

# Corrigé de l'examen final du 23 juin 2001

## Exercice 1

**1)** Si $y_1(x) = ax^2 + bx + 1$, on a en réinjectant cette expression dans l'équation différentielle sans second membre :

$$(2x+1)y'' + (4x-2)y' - 8y = 0, \tag{1}$$

pour tout $x$,

$$-4bx + 2a - 2b - 8 = 0,$$

ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} -4b = 0, \\ 2a - 2b - 8 = 0, \end{cases}$$

d'où $b = 0$ et $a = 4$ ; ainsi une solution de (1) est

$$\boxed{y_1(x) = 4x^2 + 1.} \tag{2}$$

De même, si on pose $y_2(x) = e^{\alpha x}$, on a selon (1), pour tout $x$,

$$e^{\alpha x}\left(2\alpha\,(\alpha+2)\,x + \alpha^2 - 2\alpha - 8\right) = 0,$$

ce qui implique, après division par $e^{\alpha x}$,

$$\begin{cases} 2\alpha\,(\alpha+2) = 0, \\ \alpha^2 - 2\alpha - 8 = 0. \end{cases}$$

La première équation implique $\alpha = 0$ ou $\alpha = -2$ ; 0 n'est pas solution de la seconde équation mais $-2$ en est solution. Ainsi une solution de (1) est

$$\boxed{y_2(x) = e^{-2x}.} \tag{3}$$

**2)** Par définition, le wronskien de $(y_1, y_2)$ est égal à

$$\begin{aligned} w(x) &= \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}, \\ &= y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x), \\ &= -2e^{-2x}\left(4x^2 + 4x + 1\right), \\ &= -2e^{-2x}(2x+1)^2. \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad w(x) = -2e^{-2x}(2x+1)^2.}$$

On constate que

$$\boxed{w \text{ est strictement négatif sur } ]-\infty, -1/2[ \text{ et sur } ]-1/2, +\infty[.}$$

**3)** Ainsi, d'après le cours, les solutions $y_1$ et $y_2$ sont indépendantes sur $]-\infty, -1/2[$ et sur $]-1/2, +\infty[$ et sur chacun de ces deux intervalles, la solution générale de (1) est donnée par

$$\boxed{\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \lambda y_1(x) + \mu y_2(x) = \lambda\left(4x^2+1\right) + \mu e^{-2x}.} \tag{4}$$

**4)** D'après le cours, dans l'espace vectoriel des fonctions de $]-1/2, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, le sous espace des solutions de (1) sur $]-1/2, +\infty[$ est de dimension deux (de base $(y_1, y_2)$).

**5) Question facultative**

Cherchons une solution de (1) définie sur tout $\mathbb{R}$. D'après les calculs précédents, il existe $\lambda_1$ et $\mu_1$ tels que

$$\forall x \in ]-\infty, -1/2[, \quad y(x) = \lambda_1\left(4x^2+1\right) + \mu_1 e^{-2x}. \tag{5}$$

et il existe $\lambda_2$ et $\mu_2$ (pas nécessairement égaux à $\lambda_1$ et $\mu_1$) tels que

$$\forall x \in ]-1/2, +\infty[, \quad y(x) = \lambda_2\left(4x^2+1\right) + \mu_2 e^{-2x}. \tag{6}$$

Raccorder la solution $y$ au point $-1/2$ revient à déterminer $\lambda_1$, $\mu_1$, $\lambda_2$ et $\mu_2$ tels que les valeurs de $y$ et de sa dérivée coïncident à droite et à gauche de $-1/2$, c'est-à-dire :

$$y(-1/2-) = y(-1/2+), \tag{7}$$

$$y'(-1/2-) = y'(-1/2+). \tag{8}$$

Or, selon (5), on a

$$y(-1/2-) = \lambda_1\left(4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1\right) + \mu_1 e^{-2\times\frac{1}{2}} = 2\lambda_1 + \mu_1 e. \tag{9}$$

De même, selon (6),

$$y(-1/2+) = 2\lambda_2 + \mu_2 e. \tag{10}$$

Ainsi, selon (7), il vient

$$2\lambda_1 + \mu_1 e = 2\lambda_2 + \mu_2 e. \tag{11}$$

De même, on a

$$\forall x \in ]-\infty, -1/2[, \quad y'(x) = \lambda_1\left(8x^2\right) - 2\mu_1 e^{-2x}.$$

Ainsi,

$$y'(-1/2-) = -2(2\lambda_1 + \mu_1 e).$$

De même,

$$y'(-1/2+) = -2(2\lambda_2 + \mu_2 e).$$

Donc, selon (8), il vient

$$2\lambda_1 + \mu_1 e = 2\lambda_2 + \mu_2 e,$$

ce qui est identique à (11). Ainsi, on a une unique condition qui porte sur $\lambda_1$, $\mu_1$, $\lambda_2$ et $\mu_2$ et qui permet d'exprimer, par exemple $\mu_2$ en fonction de $\lambda_1$, $\mu_1$ et $\lambda_2$ :

$$\mu_2 = \frac{2}{e}(\lambda_1 - \lambda_2) + \mu_1.$$

Si on reporte cette expression dans (5) et (6), on a donc une définition de $y$ par morceaux (et qui est définie au point $-1/2$ par l'une ou l'autre des deux expressions, qui sont justement égales en ce point) :

$$\boxed{\exists \lambda_1, \lambda_2, \mu_1 \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \begin{cases} \lambda_1\left(4x^2+1\right) + \mu_1 e^{-2x}, & \text{si } x \leq -1/2, \\ \\ \lambda_2\left(4x^2+1\right) + \left(\frac{2}{e}\left(\lambda_1-\lambda_2\right)+\mu_1\right)e^{-2x}, & \text{si } x \geq -1/2. \end{cases}} \tag{12}$$

*A priori*, trois paramètres définissent la fonction $y$ ; montrons donc que l'espace des solutions est un sous espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de dimension trois.
Pour cela, on écrit, pour tout $x \in ]-1/2, +\infty[$,

$$y(x) = \lambda_1\left(\frac{2}{e}e^{-2x}\right) + \mu_1 e^{-2x} + \lambda_2\left(-\frac{2}{e}e^{-2x} + 4x^2 + 1\right).$$

Ainsi, en définissant les trois fonction $z_1$, $z_2$ et $z_3$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$z_1(x) = \begin{cases} 4x^2+1 & \text{si } x \leq -1/2, \\ \frac{2}{e}e^{-2x} & \text{si } x > -1/2, \end{cases}$$

$$z_2(x) = e^{-2x},$$

$$z_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -1/2, \\ -\frac{2}{e}e^{-2x} + 4x^2 + 1 & \text{si } x > -1/2, \end{cases}$$

on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \lambda_1 z_1(x) + \mu_1 z_2(x) + \lambda_2 z_3(x). \tag{13}$$

Les trois fonction $z-1$, $z_2$ et $z_3$ sont représentées sur la figure 1.

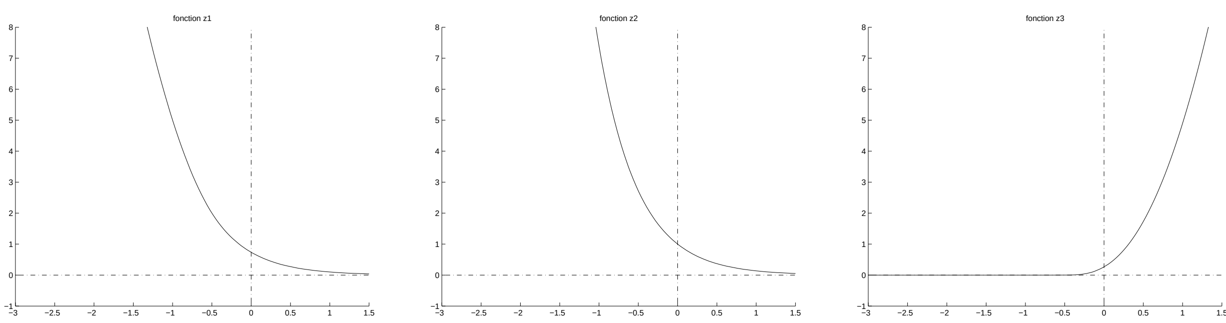


Figure 1. les fonctions $z_1$, $z_2$ et $z_3$.

On peut vérifier que ces trois fonctions ont la même valeur et la même dérivée à droite et à gauche du point $-1/2$ ; elles sont donc toutes les trois de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ et sont solution de l'équation (1). Vérifions qu'elles forment une base du sous espace vectoriel $E$ des solutions de (1). Selon (13), pour toute solution $y$ de (13), il existe $\lambda_1$, $\mu_1$ et $\lambda_2$ trois réels tels que :

$$y = \lambda_1 z_1 + \mu_1 z_2 + \lambda_2 z_3,$$

ce qui implique que $(z_1, z_2, z_3)$ forment une famille génératrice de $E$. Vérifions qu'elle forme une famille libre de $E$. Soit donc trois réels $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ tels que

$$\alpha z_1 + \beta z_2 + \gamma z_3 = 0. \tag{14}$$

On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \alpha z_1(x) + \beta z_2(x) + \gamma z_3(x) = 0.$$

En particulier, si $x < -1/2$, on a, compte tenu de l'expression de $z_1$, $z_2$ et $z_3$,

$$\alpha \left(4x^2 + 1\right) + \beta e^{-2x} = 0,$$

ce qui implique, en divisant par la quantité strictement positive $4x^2 + 1$,

$$\alpha + \beta \frac{e^{-2x}}{4x^2 + 1} = 0. \tag{15}$$

On vérifie que

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-2x}}{4x^2 + 1} = +\infty.$$

Ainsi, si $\beta \neq 0$, en passant à la limite $x \to -\infty$ dans (15), on a $\alpha + \text{signe}(\beta) \times \infty = 0$, ce qui est faux. Ainsi $\beta = 0$ et d'après (15), $\alpha = 0$. On vérifie sans problème en prenant $x > -1/2$ dans (14), que $\gamma = 0$. Ainsi (14) implique que $\alpha = \beta = \gamma = 0$ ; la famille $(z_1, z_2, z_3)$ est donc une famille libre de $E$ ; c'est donc une base de $E$ et

$$\boxed{\text{L'ensemble des solution de (1) sur } \mathbb{R} \text{ est un sous espace vectoriel de dimension trois.}}$$

On remarque que si les solutions sont considérées sur $]-1/2, +\infty[$, la dimension de cet espace est deux.

**6)** Pour calculer la primitive de produit d'une exponentielle par un polynôme il faut faire plusieurs intégration par partie successive, en dérivant à chaque fois le polynôme, de façon à faire baisser son degré, jusqu'à ce qu'il soit nul. Ainsi, en dérivant $4x^2 + 1$ et en intégrant $e^{2x}$, il vient

$$\int \left(4x^2 + 1\right) e^{2x} dx = -4 \int x e^{2x} dx + \left(2x^2 + \frac{1}{2}\right) e^{2x}.$$

En redérivant $x$, il vient

$$\int \left(4x^2 + 1\right) e^{2x} dx = \left(2x^2 + \frac{1}{2}\right) e^{2x} + 2 \int e^{2x} dx - 2x e^{2x}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\int \left(4x^2 + 1\right) e^{2x} dx = e^{2x} \left(2x^2 - 2x + \frac{3}{2}\right) + K, \text{ où} K \text{ est un réel.}}$$

**7)** Si on considère les fonctions $a$, $b$ et $c$ continues sur $]-1/2, +\infty[$, définies par

$$\begin{aligned} \forall x \in ]-1/2, +\infty[, \quad a(x) &= \frac{4x - 2}{2x + 1}, \\ b(x) &= -\frac{8}{2x + 1}, \\ c(x) &= (2x + 1)^2, \end{aligned}$$

l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$y'' + \frac{4x-2}{2x+1}y' - \frac{8}{2x+1}y = (2x+1)^2, \tag{16}$$

se met sous la forme générale :

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x). \tag{17}$$

Sachant que, sur $]-1/2, +\infty[$, les solutions $y_1$ et $y_2$ de l'équation sans second membre (1) sont indépendantes, on cherchera $y$, solution de (17), sous la forme

$$y(x) = \lambda(x)y_1(x) + \mu(x)y_2(x). \tag{18}$$

C'est la méthode de variation des constantes. Conformément au cours, on suppose que

$$\lambda' y_1 + \mu' y_2 = 0. \tag{19}$$

Ainsi, il vient

$$y' = \lambda' y_1 + \mu' y_2 + \lambda y_1' + \mu y_2' = \lambda y_1' + \mu y_2',$$

et

$$y'' = \lambda y_1'' + \mu y_2'' + \lambda' y_1' + \mu' y_2'.$$

En réinjectant ces expressions de $y$, $y'$ et $y''$ dans (17), on a

$$\begin{aligned} c &= b(\lambda y_1 + \mu y_2) + a(\lambda y_1' + \mu y_2') + \lambda y_1'' + \mu y_2'' + \lambda' y_1' + \mu' y_2', \\ &= \lambda(y_1'' + a y_1' + b y_1) + \mu(y_2'' + a y_2' + b y_2) + \lambda' y_1' + \mu' y_2'. \end{aligned}$$

Puisque $y_1$ et $y_2$ sont solutions de (1), il vient

$$\lambda' y_1' + \mu' y_2' = c. \tag{20}$$

On résout le système (19) et (20) comme un système linéaire de deux équations à deux inconnues ; par combinaison linéaire, il vient

$$\begin{aligned} (y_1 y_2' - y_2 y_1')\lambda' &= -c y_2, \\ (y_1 y_2' - y_2 y_1')\mu' &= c y_1, \end{aligned}$$

expression dans laquelle on reconnaît le wronskien $w = y_1 y_2' - y_2 y_1'$, non nul sur l'intervalle $]-1/2, +\infty[$. Ainsi, on a

$$\forall x \in ]-1/2, +\infty[, \quad \lambda'(x) = -\frac{c(x)y_2(x)}{w(x)}, \qquad \mu'(x) = \frac{c(x)y_1(x)}{w(x)}.$$

Compte tenu des expressions de $y_1$, $y_2$, $c$ et $w$, il vient

$$\forall x \in ]-1/2, +\infty[, \quad \lambda'(x) = \frac{1}{2}, \qquad \mu'(x) = -\frac{1}{2}\, e^{2x}\left(4x^2+1\right),$$

ce qui donne, par intégration

$$\boxed{\forall x \in ]-1/2, +\infty[, \quad \lambda(x) = K_1 + \frac{x}{2},}$$

où $K_1 \in \mathbb{R}$ et

$$\forall x \in ]-1/2, +\infty[, \quad \mu(x) = -\frac{1}{2} \int \left(4x^2+1\right) e^{2x} dx.$$

D'après le résultat de la question 6, il vient donc

$$\mu(x) = K_2 - \frac{1}{2} e^{2x} \left(2x^2 - 2x + \frac{3}{2}\right), \text{ où } K_2 \text{ est un réel,}$$

soit

$$\boxed{\forall x \in ]-1/2, +\infty[, \quad \mu(x) = K_2 - e^{2x} \left(x^2 - x + \frac{3}{4}\right).}$$

Ainsi, d'après (18), on a

$$\begin{aligned} y(x) &= \left(4x^2+1\right)\left(K_1 + \frac{x}{2}\right) + e^{-2x}\left(K_2 - e^{2x}\left(x^2 - x + \frac{3}{4}\right)\right), \\ &= K_1\left(4x^2+1\right) + K_2 e^{2x} + 2x^3 - x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Ainsi, il existe $K_1$ et $K_2$ réels tels que

$$\boxed{\forall x \in ]-1/2, +\infty[, \quad y(x) = K_1\left(4x^2+1\right) + K_2 e^{2x} + 2x^3 - x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}.}$$

*Remarque*

Sous cette forme, on a

$$y = K_1 y_1 + K_2 y_2 + y_0,$$

où $y_0$ est un polynôme :

$$y_0(x) = 2x^3 - x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}\ ; \tag{21}$$

$y$ est donc la somme de la solution générale de l'équation homogène associée et d'une solution, qui, selon le cours, doit être une solution particulière de l'équation avec second membre. On aurait pu, pour éviter la méthode de la variation des constantes, chercher directement une solution particulière de (16), équivalente à

$$(2x+1)y'' + (4x-2)y' - 8y = (2x+1)^3. \tag{22}$$

Avec un peu d'habitude, on la cherche sous la forme d'un polynôme de degré trois :

$$y_0(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

En réinjectant cela dans (22), il vient

$$4ax^3 + 6ax^2 + (6a - 4c)x + 2b - 2c - 8d = (2x+1)^3 = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1.$$

En identifiant les deux polynômes obtenus, on a le système :

$$\begin{cases} 4a = 8, \\ 6a = 12, \\ 6a - 4c = 6, \\ 2b - 2c - 8d = 1, \end{cases}$$

ce qui implique successivement

$$a = 2, \quad c = \frac{3}{2},$$

et en fixant arbitrairement $b=-1$, il vient $d=-3/4$, ce qui sont bien les coefficients du polynôme $y_0$ défini par (21).

**8) Question indépendante des autres questions**

**a)** Le dénominateur de $f$ est strictement positif sur $\mathbb{R}^3\setminus(0,0,0)$ et $f$ est un produit de fonctions qui sont dérivables par rapport à $x$, $y$ et $z$ sur $\mathbb{R}^3$. De plus,

$$\forall(x,y,z)\neq(0,0,0),\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=\frac{x^4+3x^2y^2+2xy^3+3x^2z^2-6xz^3}{(x^2+y^2+z^3)^2},$$

expression qui est continue sur $\mathbb{R}^3\setminus(0,0,0)$ car composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}^3\setminus(0,0,0)$. Ainsi, $\partial f/\partial x$ est continue sur $\mathbb{R}^3\setminus(0,0,0)$. De même, on vérifie que, $f$ est dérivable par rapport à $y$ et $z$ sur $\mathbb{R}^3\setminus(0,0,0)$ et que

$$\begin{aligned}\forall(x,y,z)\neq(0,0,0),\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)&=-\frac{y^4+3x^2y^2+2yx^3+3y^2z^2+6yz^3}{(x^2+y^2+z^3)^2},\\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)&=\frac{3z^4+9x^2z^2+9y^2z^2+2zy^3-2zx^3}{(x^2+y^2+z^3)^2},\end{aligned}$$

expressions continues sur $\mathbb{R}^3\setminus(0,0,0)$. Ainsi, les dérivées partielles de $f$ par rapport à $x$, $y$ et $z$ sont continues sur $\mathbb{R}^3\setminus(0,0,0)$ et donc

$$\boxed{f \text{ est différentiable sur } \mathbb{R}^3\setminus(0,0,0).}$$

D'après le cours, on a

$$\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\setminus(0,0,0),\quad df(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)dx+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)dy+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)dz.$$

En particulier, après calculs, il vient

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(2,3,0)&=\frac{232}{169},\\ \frac{\partial f}{\partial y}(2,3,0)&=-\frac{237}{169},\\ \frac{\partial f}{\partial y}(2,3,0)&=0,\end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{df(2,3,0)=\frac{232}{169}dx-\frac{237}{169}dy.}\tag{23}$$

*Rappel* L'égalité (23) signifie que la différentielle $df(2,3)$, (élément de $\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}\right)$) est la somme des deux applications linéaires $\frac{232}{169}\,dx$ et $-\frac{237}{169}\,dy$ ; on rappelle que $dx$, $dy$ et $dz$ sont les applications linéaires de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$\begin{aligned}\forall(h_1,h_2,h_3)\in\mathbb{R}^3,\quad dx.(h_1,h_2,h_3)&=h_1,\\ dy.(h_1,h_2,h_3)&=h_2,\\ dz.(h_1,h_2,h_3)&=h_3.\end{aligned}$$

Ainsi, on peut réécrire (23) sous la forme

$$\boxed{\forall (h_1,h_2,h_3)\in\mathbb{R}^3,\quad df(2,3,0).\,(h_1,h_2,h_3)=\frac{232}{169}h_1-\frac{237}{169}h_2.}$$

**b)** De façon grossière, on peut dire que $f$ est le rapport d'une expression de degré trois sur une expression de degré deux, ce qui fait une expression de degré un, qui tend vers $0 = f(0,0,0)$ quand $(x,y,z)$ tend vers $(0,0,0)$. Pour le montrer rigoureusement, majorons $f(x,y,z)$ par une quantité qui tend vers zéro quand $(x,y,z)$ tend vers $(0,0,0)$ : pour tout $(x,y,z)\neq(0,0,0)$

$$\begin{aligned}|f(x,y,z)-f(0,0,0)| &= \left|\frac{x^3-y^3+3z^3}{x^2+y^2+z^2}\right| \leq \frac{|x^3|+|y^3|+|3z^3|}{x^2+y^2+z^2} = \frac{|x|^3+|y|^3+3\,|z|^3}{x^2+y^2+z^2}\\ &\leq 3\frac{|x|\left(x^2+y^2+z^2\right)+|y|\left(x^2+y^2+z^2\right)+|z|\left(x^2+y^2+z^2\right)}{x^2+y^2+z^2} \leq 3(|x|+|y|+|z|),\end{aligned}$$

expression qui tend vers zéro quand $(x,y,z)$ tend vers $(0,0,0)$, puisqu'elle égale à $3||(x,y,z)||_1$.

## Exercice 2

**1)** Le polynôme caractéristique de la matrice $A$ est très simple à calculer, puisqu'en développant par rapport à la dernière colonne, il vient

$$\begin{aligned}\chi_A(X) &= \begin{vmatrix}2-X & -1 & 0\\ 0 & 1-X & 0\\ -1 & -3 & 3-X\end{vmatrix},\\ &= (3-X)\begin{vmatrix}2-X & -1\\ 0 & 1-X\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\chi_A(X)=-(X-1)(X-2)(X-3).}$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{le spectre de la matrice } A \text{ est } \{1,2,3\} \text{ (dans le corps } \mathbb{K}=\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{K}=\mathbb{C}).} \tag{24}$$

Chacune des valeurs propres est simple et d'après le cours,

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable et chacun de ses espaces propres est de dimension un.}}$$

Conformément à l'énoncé, on choisit les valeurs propres dans l'ordre croissant de telle sorte que

$$D=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}.$$

Le vecteur de composantes $(x,y,z)$ (par rapport à la base canonique) appartient au noyau de $A-I$ si et seulement si

$$\begin{cases}2x-y=x,\\ y=y,\\ -x-3y+3z=z,\end{cases}$$

ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} x - y = 0, \\ -x - 3y + 2z = 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire,

$$\begin{cases} x = y, \\ z = 2x, \end{cases} \tag{25}$$

ce qui est bien l'équation d'une droite vectorielle. Conformément à l'énoncé, on choisit le premier vecteur propre $w_1$ (associé à $\lambda_1 = 1$) de la forme $(x, y, 2)$ ; ainsi, selon (25), on a $x = y = 1$. Donc (si on se place dans le $\mathbb{R}$ espace vectoriel $\mathbb{R}^3$)

$$\boxed{\operatorname{Ker}(f - I) = \mathbb{R}. \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.}$$

De même, on vérifie aisément que

$$\boxed{\operatorname{Ker}(f - 2I) = \mathbb{R}. \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.}$$

et que

$$\boxed{\operatorname{Ker}(f - 3I) = \mathbb{R}. \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.}$$

Ainsi, d'après le cours, on a

$$\boxed{A = PDP^{-1} \text{ où } D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{et } P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.}$$

**2)** On vérifie que

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

D'après le cours, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{A^n = PD^nP^{-1}.}$$

On a aussi, puisque $D$ est diagonale

$$\boxed{D^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{bmatrix}.}$$

Ainsi,

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2^n & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2^n & 3^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ainsi

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \begin{bmatrix} 2^n & 1-2^n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^n-3^n & 2-2^n-3^n & 3^n \end{bmatrix}}.$$

*Remarque* En montrant que cette formule est vraie pour $n = -1$, on peut aussi montrer qu'elle est vraie pour tout entier relatif.