MT12 Printemps 2001

Corrigé de l'examen médian du 11 mai 2001

Exercice 1

1) Par définition, on a

$$\boxed{B = \mathrm{mat}_{(e_1,e_2,e_3)}(f) = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}}$$

2) Soit u un vecteur de $\mathbb{R}$ de coordonnées (x, y, z) dans la base $e = (e_1, e_2, e_3)$. Les coordonnées (x', y', z') de $f(u)$ dans la base (e_1, e_2, e_3) sont données par

$$\begin{cases} x' = -x - 2y - 4z, \\ y' = x + z, \\ z' = x + 2y + 4z. \end{cases} \tag{1}$$

Ainsi, u appartient au noyau de f si et seulement si

$$\begin{cases} -x - 2y - 4z = 0, \\ x + z = 0, \\ x + 2y + 4z = 0\,; \end{cases}$$

La première et troisième ligne de ce système sont proportionnelles et ce système est équivalent à

$$\begin{cases} x + z = 0, \\ x + 2y + 4z = 0, \end{cases}$$

encore équivalent à

$$\boxed{\begin{cases} x = -z, \\ y = \frac{3}{2} z, \end{cases}}$$

ce qui constitue une équation du noyau de f. Le noyau de f est une droite vectorielle engendrée par le vecteur obtenu en prenant, par exemple $z = -2$:

$$\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \mathbb{R}.u \text{ où les composantes de } u \text{ dans la base } e \text{ sont } \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.}$$

D'après la relation rang-noyau, la dimension de l'image de f est égale à 3-1=2. D'autre part, un vecteur U de coordonnées (X, Y, Z) dans la base e de $\mathbb{R}^3$ appartient à l'image de f si et seulement si il existe u appartenant à $\mathbb{R}^3$ tel que $U = f(u)$, c'est-à-dire, selon (1) s'il existe $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\begin{cases} X = -x - 2y - 4z, \\ Y = x + z, \\ Z = x + 2y + 4z, \end{cases}$$

ce qui implique, en sommant les première et troisième ligne que

$$\boxed{X + Z = 0.} \tag{2}$$

Cette équation est celle de l'hyperplan H, sous-espace de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2. Ainsi, $\mathrm{Im}(f) \subset H$; or ces deux sous-espaces sont de dimension égales à deux et sont donc égaux. Ainsi (2) est une équation de l'image de f. D'après (2), si l'on fixe $Y = 0$ et $X = 1$, on a $Z = 1$; si l'on fixe $Y = 1$ et $X = 0$, on a $Z = 0$; on vérifie que les vecteurs dont les composantes dans la base e sont $(1, 0, -1)$ et $(0, 1, 0)$ sont indépendants ; ainsi, l'image de f est donnée par :

$$\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}(v, w) \text{ où les composantes de } v \text{ et } w \text{ dans la base } e \text{ sont } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.}$$

3) La matrice de la famille (w_1, w_2, w_3) dans la base e est donnée par

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et l'on constate, en développant selon la dernière ligne que

$$\det(P) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2.$$

Ainsi, la matrice P est inversible et la famille (w_1, w_2, w_3) est une base de $\mathbb{R}$.
4) Par définition, P est la matrice de passage de la base e à la base $W = (w_1, w_2, w_3)$. Pour calculer l'inverse de P, on exprime les vecteurs (e_1, e_2, e_3) en fonction des vecteurs (w_1, w_2, w_3) : en sommant les deux premières lignes du système qui définit (w_1, w_2, w_3) en fonction de la base e, on a

$$\begin{cases} e_1 = \frac{1}{2}(w_1 + w_2) \\ e_1 + e_2 = w_1, \\ e_1 + e_2 + e_3 = w_3, \end{cases}$$

On en déduit successivement

$$e_2 = w_1 - e_1 = \frac{1}{2}(2w_1 - w_1 - w_2) = \frac{1}{2}(w_1 - w_2),$$

et

$$e_3 = w_3 - e_1 - e_2 = \frac{1}{2}(2w_3 - w_1 - w_2 - w_1 + w_2) = -w_1 + w_3.$$

On a donc inversé le système sous la forme :

$$\begin{cases} e_1 = \frac{1}{2}\left(w_1 + w_2\right), \\ e_2 = \frac{1}{2}\left(w_1 - w_2\right), \\ e_3 = -w_1 + w_3, \end{cases} \tag{3}$$

et on a donc

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

La matrice de f dans la base W de f est donnée par la formule de changement de base pour les endomorphismes :

$$\mathrm{mat}_{(w_1,w_2,w_3)}(f) = P^{-1}AP.$$

On calcule

$$P^{-1}A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 & -6 & -11 \\ -2 & -2 & -5 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix},$$

et on en déduit

$$\boxed{\mathrm{mat}_{(w_1,w_2,w_3)}(f) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -8 & 4 & -19 \\ -4 & 0 & -9 \\ 6 & -2 & 14 \end{bmatrix}.}$$

5) Par linéarité :

$$\begin{aligned} f(v) &= f\left(e_1\right) + 2f\left(e_2\right) + 3f\left(e_3\right) \\ &= -e_1 + e_2 + e_3 - 4e_1 + 4e_3 - 12e_1 + 3e_2 + 12e_3 \\ &= -17e_1 + 4e_2 + 17e_3. \end{aligned}$$

Selon (3), il vient

$$f(v) = -\frac{17}{2}\left(w_1 + w_2\right) + \frac{4}{2}\left(w_1 - w_2\right) + \frac{17}{2}\left(w_3 - w_1\right).$$

On a donc

$$\boxed{f(v) = -47w_1 - \frac{21}{2}w_2 + 17w_3.}$$

Exercice 2

1) Calculons le polynôme caractéristique de la matrice M :

$$\chi_M(X) = \begin{vmatrix} 5-X & -4 & -3 \\ 2 & -1-X & -1 \\ 1 & -1 & -X \end{vmatrix}.$$

En remplaçant la ligne L_1 par $L_1 - 3L_2$ et L_3 par $L_3 - XL_2$:

$$\chi_B(X) = \begin{vmatrix} -X-1 & 3X-1 & 0 \\ 2 & -1-X & -1 \\ -2X+1 & X^2+X-1 & 0 \end{vmatrix}.$$

En développant par rapport à la dernière colonne :

$$\chi_B(X) = \begin{vmatrix} -X-1 & 3X-1 \\ -2X+1 & X^2+X-1 \end{vmatrix},$$

et, après calculs,

$$\boxed{\chi_B(X) = -(X-1)^2(X-2).} \tag{4}$$

Ainsi, le spectre de la matrice M est $\{1, 2\}$ et, dans le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, le polynôme caractéristique de M est scindé. La valeur propre 2 est de multiplicité 1 et la valeur propre 1 est de multiplicité 2. D'après le cours, E_2, sous espace propre de M associé à la valeur propre 1, est de dimension 1 et la dimension de E_1 appartient à $\{1, 2\}$. Ainsi, M est diagonalisable si et seulement si $\dim(E_1) = 2$ (dans le corps $\mathbb{K}$).
Déterminons donc la dimension de $\mathrm{Ker}(M - I)$. Le vecteur $X = {}^t(x, y, z)$ appartient à $\mathrm{Ker}(M - I)$ si et seulement si

$$\begin{cases} 4x - 4z - 3z = 0, \\ 2x - 2y - z = 0, \\ x - y - z = 0. \end{cases}$$

En conservant $\mathcal{E}_3$, la dernière équation et en remplaçant $\mathcal{E}_2$ par $\mathcal{E}_2 - 2\mathcal{E}_3$ et $\mathcal{E}_1$ par $\mathcal{E}_1 - 4\mathcal{E}_3$, on constate que ce système est équivalent à

$$\begin{cases} z = 0, \\ z = 0, \\ x - y - z = 0, \end{cases}$$

c'est à dire à

$$\begin{cases} z = 0, \\ x = y, \end{cases} \tag{5}$$

ce qui est l'équation d'une droite vectorielle, de dimension 1 (engendrée par le vecteur ${}^t(1, 1, 0)$). Ainsi

$$\boxed{M \text{ n'est pas diagonalisable dans } \mathbb{R}.}$$

2) Le raisonnement fait précédemment est valable aussi dans $\mathbb{C}^3$ (la dimension de (E_1) ne dépend pas, ici, du corps de base) et donc

$$\boxed{M \text{ n'est pas diagonalisable dans } \mathbb{C}.}$$

Remarque Si on ne s'intéresse qu'à la diagonalisabilité de la matrice M, il est inutile de déterminer complètement ses sous-espaces propres.
3) D'après (4), la valeur propre de M d'ordre un est égale à $\lambda = 2$. Le vecteur X de composante (x, y, z) dans la base canonique e appartient à $\mathrm{Ker}(f - 2I)$ si et seulement si

$$\begin{cases} 3x - 4z - 3z = 0, \\ 2x - 3y - z = 0, \\ x - y - 2z = 0. \end{cases}$$

On remarque que la troisième ligne est la différence entre la première et la deuxième ligne ; après élimination de x, on constate que que ce système est équivalent à

$$\begin{cases} x = 5z, \\ y = 3z. \end{cases}$$

En prenant $z = 1$, on a donc

$$\boxed{\operatorname{Ker}(f - 2I) = \mathbb{R}.w_1 \text{ où } w_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.}$$

4) D'après (4), la valeur propre de M d'ordre deux est égale à $\mu = 1$ et selon (5), on a, en prenant $x = 1$, il vient

$$\boxed{\operatorname{Ker}(f - I) = \mathbb{R}.w_2 \text{ où } w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.}$$

5) Si on considère la matrice P des composantes des vecteurs w_1, w_2 et $w_3 = e_3$ dans la base e, on a

$$P = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{6}$$

on a, en développant par rapport à la dernière ligne,

$$\det(P) = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 \times 1 - 3 \times 1 = 2 \ ;$$

ainsi, P est inversible et

$$\boxed{w = (w_1, w_2, w_3) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$$

6) Par définition, $w_1 \in \operatorname{Ker}(f - 2I)$ et $w_2 \in \operatorname{Ker}(f - I)$; ainsi,

$$\boxed{f(w_1) = 2w_1 \text{ et } f(w_2) = w_2.} \tag{7}$$

D'autre part, par définition de f,

$$f(w_3) = f(e_3) = -3e_1 - e_2. \tag{8}$$

Exprimons e_1 et e_2 dans la base w. Pour cela, on inverse le système

$$\begin{cases} w_1 = 5e_1 + 3e_2 + e_3, \\ w_2 = e_1 + e_2, \\ w_3 = e_3. \end{cases}$$

Après calculs, il vient

$$\begin{cases} e_1 = \frac{1}{2}(w_1 - 3w_2 - w_3), \\ e_2 = \frac{1}{2}(-w_1 + 5w_2 + w_3), \\ e_3 = w_3. \end{cases} \tag{9}$$

Ainsi, d'après (8),

$$\boxed{f(w_3) = -w_1 + 2w_2 + w_3.} \tag{10}$$

D'après (7) et (10), on a, par définition,

$$\boxed{T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$\boxed{\text{Cette matrice est triangulaire supérieure.}}$$

Remarque La matrice M n'est pas diagonalisable, mais il existe une base dans laquelle l'endomorphisme associé est triangulaire : on dit que l'on a triangularisé M. On peut montrer que

$$\boxed{\text{Une matrice est triangularisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.}}$$

Si le corps de base est $\mathbb{C}$, toute polynôme est scindé ; ainsi, on en déduit que

$$\boxed{\text{Toute matrice est triangularisable dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).}$$

Cette propriété permet de calculer les puissances n-ièmes d'une matrice si celle-ci n'est pas diagonalisable.

7) D'après (9), on a

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Après calculs, on a

$$P^{-1}M = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & -3 & -2 \\ -5 & 7 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

et, après calcul, on retrouve la formule de changement de passage de l'ancienne base e à la nouvelle base w pour la matrice M :

$$\boxed{T = P^{-1}MP.}$$

Exercice 3 – Facultatif

Calculons le polynôme caractéristique de la matrice A :

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} -X & -1 & 1 \\ -a-1 & a-X & a+1 \\ -a & a & a+1-X \end{vmatrix}.$$

En remplaçant la colonne C_1 par $C_1 + XC_3$ et C_2 par $C_2 + C_3$, on a

$$\chi_B(X) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -(a+1)+(a+1)X & 2a+1-X & 0 \\ -a+(a+1-X)X & 2a+1-X & 0 \end{vmatrix} = -(X-2a-1)\begin{vmatrix} (a+1)(X-1) & 1 \\ -X^2+(a+1)X-a & 1 \end{vmatrix}.$$

Après calculs,

$$\chi_A(X) = -(X-2a-1)(X^2-1),$$

et

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{2a+1, 1, -1\}.} \tag{11}$$

Étudions les différents cas selon que $2a+1=1$ ou $2a+1=-1$, c'est-à-dire $a=0$ ou $a=-1$.

Premier cas : $a \neq 0$ et $a \neq -1$
La matrice A possède trois valeurs propres distinctes, $2a+1$, 1 et -1, et est donc diagonalisable ; chacun des ses sous espaces propres est une droite vectorielle (on peut se placer dans $\mathbb{K}^3$ où $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$). Après calculs, on a

$$\operatorname{Ker}(A-(2a+1)I) = \mathbb{K}.\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},$$

$$\operatorname{Ker}(A-I) = \mathbb{K}.\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$\operatorname{Ker}(A+I) = \mathbb{K}.\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

On a donc

$$\boxed{D = P^{-1}AP, \text{ où } D = \begin{bmatrix}2a+1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix} \text{ et } P = \begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}.} \tag{12}$$

Second cas : $a=0$ ou $a=-1$
A possède deux valeurs propres, λ d'ordre de multiplicité un et μ d'ordre 2. D'après le cours, A est donc diagonalisable si et seulement si $\operatorname{Ker}(A-\mu I)$ est de dimension deux. On pourrait réétudier ce sous espace vectoriel mais on peut remarquer que (12) (valable si $a \neq 0$ et $a \neq -1$) est encore valable si on passe à la limite $a \to 0$ ou $a \to 1$: en effet les matrices P et P^{-1} sont indépendantes de a et les matrices D et A dépendent continûment de a. Ainsi, on a selon (12)

$$\boxed{\text{si } a=0 \;\; D = P^{-1}AP, \text{ où } D = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix} \text{ et } P = \begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}.}$$

et

$$\boxed{\text{si } a=-1 \;\; D = P^{-1}AP, \text{ où } D = \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix} \text{ et } P = \begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}.}$$

Dans le premier cas, 1 est valeur propre d'ordre deux, de sous espace associé de dimension deux et -1 est valeur propre d'ordre un, de sous espace associé de dimension un. Dans le second cas, -1 est valeur propre d'ordre deux, de sous espace associé de dimension deux et 1 est valeur propre d'ordre un, de sous espace associé de dimension un.