MT12 Printemps 2001

Examen final du 23 juin 2001

Durée : deux heures

Aucun document - Calculatrice interdite.

On rédigera les deux exercices sur deux copies différentes.

Exercice 1 (15 points)

1) Soit l'équation différentielle

$$(2x+1)y'' + (4x-2)y' - 8y = 0. \tag{1}$$

Chercher des solutions de cette équation différentielle sous la forme

$$y_1(x) = ax^2 + bx + 1, \text{ où } a, b \in \mathbb{R},$$

et

$$y_2(x) = e^{\alpha x}, \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}.$$

2) Calculer w le wronskien de (y_1, y_2), dont on rappelle l'expression

$$\forall x \in \mathbb{R}, w(x) = \det \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix}.$$

Sur quel intervalle est-il non nul ?

3) En déduire la solution générale de (1) sur $]-\infty, 1/2[$ et $]-1/2, +\infty[$.

4) Dans l'espace vectoriel des fonctions de $]-1/2, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, de quelle dimension est le sous espace des solutions de (1) sur $]-1/2, +\infty[$?

5) Question facultative

En raccordant y et y' au point $-1/2$, montrez que (1) *possède des solutions définies sur $\mathbb{R}$. Dans l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de quelle dimension est le sous espace des solutions de* (1) *sur $\mathbb{R}$?*

6) Déterminer les primitives de

$$g(x) = e^{2x}\left(4x^2 + 1\right).$$

7) Calculer la solution générale sur $]-1/2,+\infty[$ de l'équation différentielle

$$y'' + \frac{4x-2}{2x+1}y' - \frac{8}{2x+1}y = (2x+1)^2.$$

On pourra chercher la solution sous la forme $y(x) = \lambda(x)y_1(x) + \mu(x)y_2(x)$ et utiliser la question 6.

8) Cette question est indépendante des autres questions
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3 + 3z^3}{x^2+y^2+z^2}, & \text{si } (x,y,z) \neq (0,0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y,z) = (0,0,0). \end{cases}$$

a) Justifier l'existence de la différentielle de f au point $(2,3,0)$ et la calculer.
b) La fonction f est elle continue en 0 ?

Exercice 2 (6 points)

1) Diagonaliser la matrice suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 3 \end{bmatrix},$$

en mettant la matrice diagonale D sous la forme

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}, \text{ où } \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3,$$

et la matrice de changement de base sous la forme

$$P = \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2) En déduire l'expression de A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.