MT12 Printemps 2001

Examen médian du 11 mai 2001

Durée : deux heures

Aucun document - Calculatrice interdite.

On rédigera les trois exercices sur trois copies différentes.

Exercice 1 (8 points)

Soient (e_1, e_2, e_3) une base de $\mathbb{R}^3$ et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ tel que

$$\begin{aligned} f(e_1) &= -e_1 + e_2 + e_3, \\ f(e_2) &= -2e_1 + 2e_3, \\ f(e_3) &= -4e_1 + e_2 + 4e_3. \end{aligned}$$

1) Calculer la matrice A de f dans la base (e_1, e_2, e_3).

2) Donner une base et une équation du noyau et de l'image de f.

3) Le système de vecteurs (w_1, w_2, w_3) définis par

$$\begin{cases} w_1 = e_1 + e_2, \\ w_2 = e_1 - e_2, \\ w_3 = e_1 + e_2 + e_3, \end{cases}$$

constitue-t-il une base de $\mathbb{R}^3$?

4) Le cas échéant, calculer $B = \mathrm{mat}_{(w_1,w_2,w_3)}(f)$.

5) Soit $v = e_1 + 2e_2 + 3e_3$. Calculer $f(v)$ dans la base (w_1, w_2, w_3).

Exercice 2 (13 points)

Soit la matrice

$$M = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1) Peut on diagonaliser M dans $\mathbb{R}$?

2) Peut on la diagonaliser dans $\mathbb{C}$?
3) On appelle f l'endomorphisme associé à la matrice M par rapport à la base canonique $e = (e_1, e_2, e_3)$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. Soit λ la valeur propre de M d'ordre de multiplicité 1. Déterminer un vecteur w_1 de $\operatorname{Ker}(f - \lambda I)$; on cherchera w_1 tel que ses composantes dans la base e soient de la forme $(x, y, 1)$.
4) Soit μ la valeur propre de M d'ordre de multiplicité 2. Déterminer un vecteur w_2 de $\operatorname{Ker}(f - \mu I)$; on cherchera w_2 tel que ses composantes dans la base e soient de la forme $(1, y, z)$.
5) Si l'on pose $w_3 = e_3$, montrer que le système $w = (w_1, w_2, w_3)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.
6) Exprimer, sans calcul, $f(w_1)$ et $f(w_2)$. Calculer $f(w_3)$ par rapport à la base w et en déduire $T = \operatorname{mat}_{(w_1,w_2,w_3)}(f)$. Quelle est la forme de cette matrice ?
7) Si P désigne la matrice de passage de la base e à la base w, vérifier que $T = P^{-1}MT$.

Exercice 3 – Facultatif (bonus : 2 points)

Diagonaliser la matrice suivante

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -a-1 & a & a+1 \\ -a & a & a+1 \end{bmatrix},$$

où a est un réel.