# MT25 EXAMEN MEDIAN P05

*Durée 2 heures, aucun document autorisé.*

## Exercice 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct ( O , i , j )
Soit le point A ( 0 , 2 ) et le cercle C de centre A et de rayon $a > 0$ .
Un point P décrit le cercle C et est repéré par l'angle $\theta = ( i , AP )$
On utilisera la base mobile ( $u_\theta$ , $u'_\theta$ ) habituelle
$u_\theta = \cos\theta\, i + \sin\theta\, j$ ; $u'_\theta = -\sin\theta\, i + \cos\theta\, j$
On considère la projection orthogonale M du point O sur la tangente en P au cercle C.
La droite OM recoupe le cercle $\Gamma$ de diamètre [ OA ] en un point Q.

1) Faire une figure ; Que peut-on dire du quadrilatère APMQ ?
2) Montrer que M décrit la courbe $L_a$ d'équation polaire $r = a + 2\cos\theta$

Etude de la courbe $L_a$ :

3) Déterminer l'axe de symétrie de $L_a$
4) Etudier les variations de $f(\theta) = a + 2\cos\theta$ sur $[0, \pi]$ et étudier les passages au pôle.
5) Dessiner les courbes pour $a = 1$ et $a = 3$
6) Montrer que la courbe $L_a$ a deux points d'inflexion si et seulement si $2 < a < 4$

Etude de la courbe $L_a$ pour $a = 2$ ( notée L pour la suite )

7) Déterminer le repère de Frenet en $M_\theta$ , $0 < \theta < \pi$
8) Calculer la longueur de la courbe L
9) Calculer le rayon de courbure R en $M_\theta$, $0 < \theta < \pi$

## Exercice 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct ( O , i , j )
Soit l'hyperbole H d'équation cartésienne $xy = a^2$
Deux points A et B décrivent H de façon que $x_B = 2x_A$

1) Donner l'équation cartésienne de la droite AB ( on notera l'abscisse de A : $x_A = at$ t étant un paramètre )
2) Déterminer l'enveloppe de la famille de droites AB
3) Montrer que cette enveloppe est encore une hyperbole.