

TRAVAUX DIRIGÉS DE L'UV MT25

**APPLICATIONS DE L'ALGÈBRE ET DE L'ANALYSE
À LA GÉOMÉTRIE**

Printemps 2007

Jérôme BASTIEN & Claude PETITJEAN

Document compilé le 28 juin 2007

Liste des Travaux Dirigés

Travaux Dirigés 1.	Courbes paramétrées	3
Travaux Dirigés 2.	Courbes paramétrées en coordonnées polaires	5
Travaux Dirigés 3.	Propriétés métriques des courbes paramétrées	7
Travaux Dirigés 4.	Fonctions de plusieurs variables	11
Travaux Dirigés 5.	Intégrales doubles	15
5.1.	Calculs d'intégrales doubles	15
5.2.	Calculs d'aires et d'inerties	15
Travaux Dirigés 6.	Intégrales triples	19
6.1.	Calculs d'intégrales triples	19
6.2.	Calculs de volumes et d'inerties	19
Travaux Dirigés 7.	Produit scalaire, espace préhilbertien réel et espace euclidien	21
Travaux Dirigés 8.	Endomorphismes symétriques et orthogonaux d'un espace Euclidien	23
Travaux Dirigés 9.	Coniques et quadriques	25

TRAVAUX DIRIGÉS 1

Courbes paramétrées

EXERCICE 1.1.

Soit la courbe paramétrée :

$$F(t) = (2 \sin(t) - \sin(2t), 2 \cos(t) - \cos(2t)),$$

- (1) Sur quel intervalle peut-on étudier la courbe ?
- (2) Étudier la courbe au voisinage de $t = 0$.

EXERCICE 1.2.

Soit la courbe paramétrée :

$$F(t) = \left(\frac{t^3}{t^2 - 9}, \frac{t(t-2)}{t-3} \right)$$

- (1) Étudier les asymptotes en $t = \pm\infty$. On précisera la position de la courbe par rapport à ses asymptotes.
- (2) Retrouver ces résultats en posant $u = 1/t$ et en faisant un développement limité de x et y quand u tend vers zéro. On montrera donc que, pour $t \rightarrow \pm\infty$,

$$x(t) = t + \frac{9}{t} + o\left(\frac{1}{t}\right),$$

$$y(t) = t + 1 + \frac{3}{t} + o\left(\frac{1}{t}\right),$$

expressions appelées développements asymptotiques.

EXERCICE 1.3.

Soit la courbe paramétrée :

$$F(t) = \left(\frac{1+t^2}{t}, \frac{(1-t)^2}{t^2} \right)$$

- (1) Montrer que la parabole d'équation cartésienne $y = (x-1)^2 - 2$ est asymptote à la courbe quand t tend vers zéro. On étudiera la position de la courbe par rapport à cette asymptote.
- (2) Oubliez le résultat de la question précédente ! Comment peut-on alors retrouver l'asymptote quand t tend vers zéro, sans connaître *a priori* son équation ? On utilisera pour cela la méthode de la question 2 de l'exercice 1.2.

On étudiera de nouveau la position de la courbe par rapport à cette asymptote.

EXERCICE 1.4.

Soit la courbe paramétrée :

$$F(t) = \left(\frac{2t-1}{t^2-1}, \frac{t^2}{t-1} \right).$$

Quels sont les points doubles de cette courbes ?

EXERCICE 1.5.

Étudier complètement la courbe de l'exercice 1.1.

EXERCICE 1.6.

Étudier complètement la courbe définie par :

$$F(t) = \left(\ln \left(\left| \frac{t^2 - 1}{4} \right| \right), \sqrt{3} \ln \left(\left| \frac{t + 1}{t - 1} \right| \right) \right).$$

EXERCICE 1.7.

Étudier complètement la courbe de l'exercice 1.4.

EXERCICE 1.8.

Étudier complètement la courbe de l'exercice 1.3.

TRAVAUX DIRIGÉS 2

Courbes paramétrées en coordonnées polaires

EXERCICE 2.1.

Soit la courbe paramétrée définie en polaires par

$$r(\theta) = 1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Étudier les tangentes à la courbes en $\theta = \pm\pi$.

EXERCICE 2.2.

Soit la courbe paramétrée définie en polaires par

$$r(\theta) = \frac{1}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

Étudier l'asymptote à la courbe au voisinage de $\theta = \pi$.

EXERCICE 2.3.

Étudier complètement la courbe de l'exercice 2.1. On montrera comment réduire l'intervalle d'étude à $[-\pi, \pi]$.

EXERCICE 2.4.

Étudier complètement la courbe définie en polaires par :

$$r(\theta) = 1 - \sin(2\theta).$$

On montrera comment réduire l'intervalle d'étude à $[-\pi/4, \pi/4]$.

EXERCICE 2.5.

Étudier complètement la courbe de l'exercice 2.2. On montrera comment réduire l'intervalle d'étude à $[-\pi, \pi]$.

EXERCICE 2.6.

Soient $a > 0$ et la courbe Γ d'équation cartésienne

$$x(x^2 + y^2) - 2ay^2 = 0.$$

Trouver une équation polaire de Γ , l'étudier et la dessiner.

EXERCICE FACULTATIF 2.7.

Étudier complètement la courbe définie en polaires par :

$$r(\theta) = \frac{\sin \theta}{\sin \theta - \cos \theta}.$$

Propriétés métriques des courbes paramétrées

EXERCICE 3.1 (Longueur de cycloïde).

On considère un cercle de centre Ω , de rayon a se déplaçant «sans glisser». Soit un point M fixe de ce cercle.

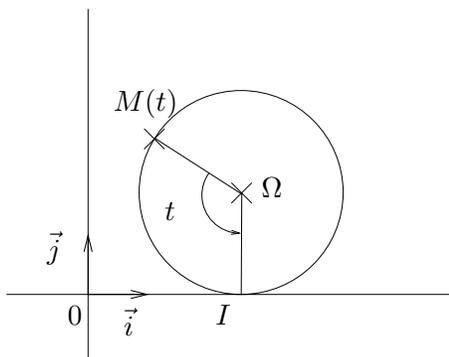


FIG. 3.1. Le cercle définissant la cycloïde.

Initialement, à $t = 0$, le point Ω a pour coordonnées $(\Omega, 0)$ et M est l'origine. Puis, pour tout $t \geq 0$, le cercle s'est déplacé vers la droite de telle sorte que

$$t = \left(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega I}} \right), \quad (3.1)$$

où I est le point de contact entre le cercle et l'axe des x . Voir figure 3.1.

- (1) Montrer en écrivant l'égalité de la longueur de l'arc de cercle IM et la distance OI , que les coordonnées $(x(t), y(t))$ de M vérifient

$$x(t) = a(t - \sin t), \quad (3.2a)$$

$$y(t) = a(1 - \cos t). \quad (3.2b)$$

- (2) Étudier rapidement la courbe décrite par $M(t)$ quand t décrit \mathbb{R} .
 (3) En déterminer sa longueur pour t décrivant $[0, 2\pi]$.

EXERCICE 3.2 (Autre preuve de la courbe enveloppe des normales).

Dans cet exercice, on propose une autre preuve de la proposition 3.50 page 54 du chapitre 3 : si une courbe paramétrée est birrégulière, sa développée est l'ensemble des centres de courbure.

Montrer que la point caractéristique de la normale N_t a pour coordonnées :

$$X(t) = x(t) - \frac{x'^2(t) + y'^2(t)}{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}y'(t), \quad (3.3a)$$

$$Y(t) = y(t) + \frac{x'^2(t) + y'^2(t)}{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}x'(t), \quad (3.3b)$$

et conclure.

EXERCICE 3.3.

Soit l'exemple 3.36 page 46 du chapitre 3 du cours défini par

$$F(t) = (t + \sin(t) - 4 \sin(t/2), 3 + \cos(t) - 4 \cos(t/2)), \quad (3.4)$$

(1) Montrer qu'en tout point, différent de $n\pi$ où $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$\phi = \pi - t/2, \quad (3.5a)$$

$$R = -4(1 - \cos(t/2)). \quad (3.5b)$$

(2) Montrer que la développée de cette courbe est une cycloïde (voir exercice 3.1).

(3) Tracer, au voisinage de $t = \pi/3$, le repère de Frenet, le centre et le cercle de courbure, la parabole osculatrice et quelques points de la courbe.

EXERCICE 3.4. Soit la courbe définie en polaire par

$$r(\theta) = 1 + \cos \theta. \quad (3.6)$$

(1) Calculer en tout point le repère de Frenet, le rayon de courbure et l'angle ϕ .

(2) Déterminer la développée de cette courbe.

EXERCICE FACULTATIF 3.5 (L'astroïde).

Soit une échelle PQ appuyée sur un mur : P est sur l'axe des x , Q est sur l'axe des y et $PQ = a$, où a est un réel strictement positif. O est l'origine. On étudie la courbe Γ enveloppe de la famille de droite (PQ) .

(1) Quelle est la courbe décrite par le quatrième sommet N du rectangle $OPNQ$?

(2) On choisit comme paramètre l'angle

$$t = \left(\widehat{i, \overrightarrow{ON}} \right). \quad (3.7)$$

Écrire l'équation cartésienne de la droite (PQ) en fonction de t et en déduire que Γ est la courbe paramétrée :

$$\forall t \in [0, 2\pi], \quad \begin{cases} x(t) = a \cos^3 t, \\ y(t) = a \sin^3 t, \end{cases} \quad (3.8)$$

(3) Montrer que (MN) est perpendiculaire à (PQ) et en déduire une construction point par point de Γ .

(4) Calculer la longueur de Γ .

(5) (a) Déterminer la développée de Γ .

(b) Calculer les coordonnées des centres de courbure de Γ dans le repère image du repère initial dans la rotation d'angle $\pi/4$ et d'angle l'origine.

- (c) On montrera que la développée de Γ est encore une astroïde.
- (d) Tracer dans le même repère ces deux astroïdes.

EXERCICE FACULTATIF 3.6 (La spirale logarithmique).

Soient a et m deux nombre strictement positifs et la courbe Γ d'équation polaire :

$$r(\theta) = ae^{m\theta}. \quad (3.9)$$

- (1) Calculer en tout point une abscisse curviligne, le repère de Frenet et le rayon de courbure.
- (2) Calculer la longueur de Γ pour $\theta \in [0, 2\pi]$.
- (3) Montrer que l'angle $V(\theta)$ entre la droite $\mathbb{R}\vec{u}_\theta$ et la tangente $T(\theta)$ à la courbe est constant et que le centre de courbure I en $M(\theta)$ est tel que les droites (OI) et (OM) sont perpendiculaires.
- (4) Tracer la courbe pour $a = 1$ et $m = 1/\sqrt{3}$ ainsi que sa développée.
- (5) Déterminer une équation polaire de la développée de Γ et montrer que c'est une spirale logarithmique.
- (6) Réciproquement, on cherche les courbes \mathcal{C} telles que l'angle $V(\theta)$ soit constant égal à α .
 - (a) Si α est un multiple de π , montrer que \mathcal{C} est incluse dans une droite passant par l'origine.
 - (b) Si α est un multiple impair de $\pi/2$, montrer que \mathcal{C} est incluse dans un cercle de centre l'origine.
 - (c) Sinon, montrer qu'une équation polaire de \mathcal{C} vérifie une équation différentielle d'ordre 1 que l'on intégrera ; en déduire que \mathcal{C} est une spirale logarithmique.

Fonctions de plusieurs variables

EXERCICE 4.1.

On considère les coordonnées polaires (r, θ) et les coordonnées cartésiennes (x, y) .

- (1) Calculer la matrice jacobienne

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

- (2) Soit f une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} , supposée suffisamment dérivable.

- (a) On passe en coordonnées polaires. Calculer les dérivées $\partial f/\partial x$ et $\partial f/\partial y$ par rapport aux dérivées $\partial f/\partial r$ et $\partial f/\partial \theta$ (x et y sont les nouvelles variables et r et θ , les anciennes variables).
- (b) En déduire l'expression de $\partial f/\partial x + \partial f/\partial y$ en coordonnées polaires (c'est-à-dire par rapport aux dérivées partielles par rapport à r et θ).
- (c) Calculer de même le laplacien de f en coordonnées polaires défini par

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

EXERCICE FACULTATIF 4.2.

On considère la fonction f définie par

$$f(x, y) = \frac{x^2 + xy}{y^3}.$$

- (1) Calculer numériquement en $X = (1, 1)$ et $X' = (100, 100)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1),$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(100, 100) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(100, 100).$$

- (2) On pose $h = 0,001$ et $k = 0,003$. Calculer numériquement :

$$df(1, 1).(h, k) \text{ et } df(100, 100).(h, k).$$

(3) Calculer numériquement

$$\begin{aligned} f(1, 1), \\ f(1 + h, 1 + k), \\ f(100, 100), \\ f(100 + h, 100 + k). \end{aligned}$$

(4) Comparer

$$\begin{aligned} f(1 + h, 1 + k) \text{ et } f(1, 1) + df(1, 1).(h, k), \\ f(100 + h, 100 + k) \text{ et } f(100, 100) + df(100, 100).(h, k). \end{aligned}$$

(5) Commentez !

EXERCICE 4.3.

Soit la fonction f de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq 0, \\ 0, & \text{si } (x, y) = 0. \end{cases}$$

- (1) Calculer les dérivées partielles d'ordre deux $\partial^2 f / (\partial x \partial y)$ et $\partial^2 f / (\partial y \partial x)$ sur \mathbb{R}^2 .
- (2) Que peut on en déduire ?
- (3) La fonction f est-elle de classe C^1 en zéro, sur \mathbb{R}^2 ?

EXERCICE 4.4. Soit la fonction f de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (x - y)^2 + x^3 + y^3.$$

Déterminer les extremums relatifs de f .

EXERCICE FACULTATIF 4.5. Soit la fonction f de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (\sin x)(\sin y)(\sin(x + y)).$$

- (1) Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x + \pi, y) = f(x, y + \pi) = f(x, y),$$

et que

$$f(-x, -y) = -f(x, y).$$

- (2) En déduire que la recherche des extremums relatifs de f peut être limitée à $[0, \pi/2] \times [-\pi/2, \pi/2]$.
- (3) Déterminer les extremums relatifs de f sur $[0, \pi/2] \times [-\pi/2, \pi/2]$.
- (4) En déduire les extremums relatifs de f sur \mathbb{R}^2 .

EXERCICE 4.6. Soit la fonction f de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R} définie par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = y - z + xyz + \frac{1}{2}x^2.$$

Déterminer les extremums relatifs de f .

EXERCICE FACULTATIF 4.7.

Soient r et R deux réels strictement positifs.

Dans le repère orthonormé usuel du plan, le point A a pour coordonnées $(r, 0)$ et le point B a pour coordonnées $(-R, 0)$.

Un point M décrit le cercle de centre A et de rayon r et un point P décrit le cercle de centre B et de rayon R .

Soit les angles $\alpha = \left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}}\right)$ et $\beta = \left(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OP}}\right)$.

Exprimer en fonction de α et de β l'aire $S(\alpha, \beta)$ du triangle OMP et en déduire l'aire maximum du triangle OMP en fonction de r et R .

Intégrales doubles

5.1. Calculs d'intégrales doubles

EXERCICE 5.1. On calculera dans chacun des cas suivants l'intégrale

$$\iint_D f(x, y) dx dy,$$

où f et $D \subset \mathbb{R}^2$ sont donnés.

a) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi, |y| \leq \sin x\}$ et $f(x, y) = y^2 \sin x$,

b) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y^2 + 2x \leq 1\}$ et $f(x, y) = x^2 + y^2$,

c) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$ et $f(x, y) = x + y$ (on passera en polaire).

EXERCICE FACULTATIF 5.2.

(1) Montrer que

$$\forall x \in [0, 1], \quad \ln(1+x) = \int_0^1 \frac{x}{1+xy} dy.$$

(2) En déduire, en utilisant le théorème de Fubini, la valeur de

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx.$$

5.2. Calculs d'aires et d'inerties

EXERCICE 5.3. Calculer l'aire de la région du plan délimitée par une ellipse, de demi axes égaux à $a > 0$ et $b > 0$:

$$(x, y) \in D \iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

On pourra calculer

$$\iint_D dx dy,$$

en considérant le changement de variable :

$$\begin{cases} x = ar \cos \theta, \\ y = br \sin \theta. \end{cases}$$

EXERCICE 5.4. On cherche à calculer la position du centre de gravité de la plaque homogène $ABCDE$ F définie sur la figure 5.1 (les coordonnées des points A, B, \dots sont des nombres entiers indiqués sur cette figure).

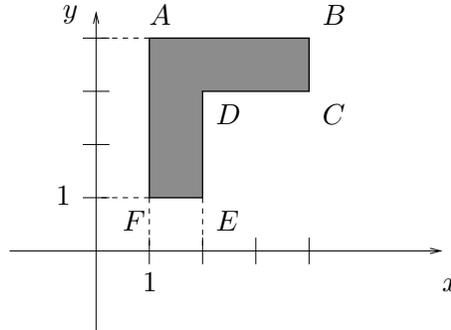


FIG. 5.1. Une plaque homogène

- (1) Calculer les coordonnées x_G et y_G en décomposant la surface $ABCDEF$ en rectangles et en utilisant l'associativité du centre de gravité.
- (2) Refaire le même calcul en utilisant directement les formules vues en cours.

EXERCICE 5.5. Soit une plaque rectangulaire comme indiquée sur la figure 5.2. On admet que ses axes principaux sont les axes x et y indiqués sur cette figure.

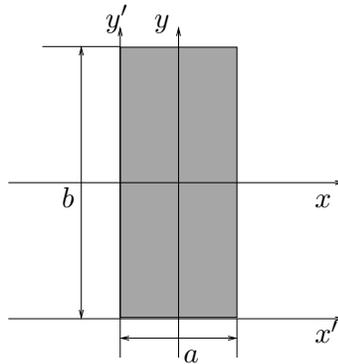


FIG. 5.2. Une plaque rectangulaire

- (1) Calculer les moments quadratiques I_x et I_y en fonction de a et de b .
- (2) On considère les axes x' et y' comme indiqués sur la figure. Calculer les moments quadratiques $I_{x'}$ et $I_{y'}$.

On fera deux calculs : soit par intégration directe, soit en utilisant les résultats de la première question et le théorème de Huygens.

EXERCICE FACULTATIF 5.6. Soient $a > 0$, la fonction f définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)},$$

et le domaine D_a défini par

$$D_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x^2 + y^2 \leq a^2.\}$$

(1) Calculer

$$g(a) = \iint_{D_a} f(x, y) dx dy;$$

(2) Soit

$$h(a) = \iint_{[0, a]^2} f(x, y) dx dy;$$

Montrer que

$$\forall a \in \mathbb{R}_+, \quad g(a) \leq h(a) \leq g(\sqrt{2}a).$$

(3) En déduire la valeur de l'intégrale ¹

$$J = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

¹qui intervient dans le calcul de probabilité (densité de la loi Gaussienne centrée réduite).

Intégrales triples

6.1. Calculs d'intégrales triples

EXERCICE 6.1. On calculera dans chacun des cas suivants

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz$$

où f et $D \subset \mathbb{R}^3$ sont donnés.

- a) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq xy\}$ et $f(x, y, z) = x^2 y^3 z$,
 b) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 2pz, 0 \leq z \leq a\}$ et $f(x, y, z) = |xyz|$ ($p, a \in \mathbb{R}_+^*$ fixés).

Pour le dernier calcul, on pourra utiliser les coordonnées cylindriques.

EXERCICE FACULTATIF 6.2. Calculer l'intégrale

$$\iiint_{\Delta} (x + y) dx dy dz$$

où Δ est le domaine défini comme l'intérieur du tétraèdre $OABC$ dont les coordonnées des sommets sont

$$\begin{aligned} O &= (0, 0, 0), \\ A &= (1, 0, 0), \\ B &= (1, 0, 2), \\ C &= (0, 1, 1). \end{aligned}$$

6.2. Calculs de volumes et d'inerties

EXERCICE 6.3. Calculer le volume des domaines suivants :

- a) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq a^2, x^2 + z^2 \leq a^2\}$ (a est un réel positif),
 b) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 \leq 1 - z, z \geq 0\}$.

EXERCICE 6.4. On considère une sphère \mathcal{V} de rayon R , de centre l'origine et de masse volumique ρ qui ne dépend que de r (en coordonnées sphériques).

- (1) Calculer le volume V de cette sphère et exprimer sa masse M en fonction d'une intégrale dépendant de ρ .

(2) Dans le cas où

$$\rho(r) = \rho_0 \frac{r}{R},$$

avec ρ_0 constante, déterminer M et la masse volumique moyenne de cette sphère.

EXERCICE FACULTATIF 6.5. On considère le cône C de révolution de sommet O d'axe $z'Oz$ et de demi-angle au sommet $\pi/4$ et le cylindre de révolution Γ de rayon $a > 0$ et d'axe D d'équation $(y = a, x = 0)$.

Soit \mathcal{D} le domaine constitué des points situés au dessus du plan xOy , à l'intérieur du cylindre Γ et en dessous du cône C .

- (1) Définir \mathcal{D} par trois inéquations et faire une figure.
- (2) Calculer le volume de \mathcal{D} .
- (3) Calculer le moment d'inertie de \mathcal{D} (homogène) par rapport à l'axe $z'0z$.
- (4) Déterminer le centre d'inertie de \mathcal{D} (homogène).

Produit scalaire, espace préhilbertien réel et espace euclidien

EXERCICE 7.1.

Soit E l'espace vectoriel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 3. Soit $\mathcal{B} = \{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de E :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad e_0(x) &= 1, \\ e_1(x) &= x, \\ e_2(x) &= x^2, \\ e_3(x) &= x^3. \end{aligned}$$

On considère le produit scalaire défini sur E par

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 fg. \quad (7.1)$$

- (1) Justifier brièvement l'affirmation contenue dans la phrase précédente.
- (2) Écrire la matrice du produit scalaire dans la base \mathcal{B} .
- (3) Construire une base orthogonale puis une base orthonormée $\mathcal{B}' = \{f_0, f_1, f_2, f_3\}$ de l'espace euclidien E .

EXERCICE 7.2.

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel pour lequel la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ est orthonormée.

Soit

$$F = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \text{ et } x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \right\}.$$

- (1) Montrer que F est un sous espace vectoriel de E .
- (2) Calculer dans la base \mathcal{B} la matrice de la projection orthogonale sur F .

EXERCICE 7.3.

- (1) À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans l'espace euclidien usuel \mathbb{R}^n , montrer que

$$\forall (a, b, c) = ((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n), (c_1, \dots, c_n)) \in (\mathbb{R}_+^n)^3, \quad \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i c_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 b_i \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 c_i \right).$$

- (2) Déterminer les cas d'égalité.

Endomorphismes symétriques et orthogonaux d'un espace Euclidien

EXERCICE 8.1. L'espace vectoriel euclidien E est muni d'une base orthonormée $B = (i, j, k)$. Déterminer la nature des endomorphismes de E définis par leurs matrices dans la base et en donner les éléments de géométrie qui les caractérisent (axe et angle pour les rotations, axe pour les symétries, image pour les projections) :

$$A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 & -1 & -4 \\ -1 & 8 & -4 \\ -4 & -4 & -7 \end{pmatrix}.$$

EXERCICE 8.2. Soient r et r' deux rotations de l'espace euclidien E de dimension 3. Démontrer que $r \circ r' = r' \circ r$ si et seulement si on est dans un des trois cas suivants :

- $r = Id$ ou $r' = Id$;
- r et r' ont le même axe (que peut-on alors dire de l'angle de $r \circ r'$?) ;
- les axes de r et r' sont orthogonaux et r et r' sont des demi-tours.

EXERCICE 8.3.

L'espace vectoriel euclidien E est muni d'une base orthonormée $B = (i, j, k)$. Soit r la rotation de E d'axe $D = \text{Vect}(a)$ et d'angle θ (a unitaire).

(1) Montrer que

$$\forall x \in E, \quad r(x) = (1 - \cos \theta) \langle x, a \rangle a + (\cos \theta) x + (\sin \theta) a \wedge x.$$

(2) Application : calculer la matrice de r dans la base B lorsque $a = \sqrt{2}/2(-i + k)$ et $\theta = \pi/4$.

EXERCICE 8.4.

Calculer dans la base canonique de R^3 , les matrices des endomorphismes suivants :

- (1) p est la projection orthogonale sur la droite engendrée par $a = (1, 1, 1)$;
- (2) s est la symétrie orthogonale par rapport au plan P d'équation cartésienne $x + y + z = 0$ dans la base canonique ;
- (3) $p \circ s$ et $s \circ p$. Quelles sont les valeurs propres et les sous-espaces propres de ces endomorphismes. Sont-ils orthogonaux ? Sont-ils symétriques ?

Coniques et quadriques

EXERCICE 9.1.

- (1) Diagonaliser les matrices symétriques suivantes au moyen d'une base orthonormale de vecteurs propres :

$$A = \begin{pmatrix} 481 & 192 \\ 192 & 369 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{pmatrix}.$$

- (2) Le plan étant muni d'un repère orthonormé $R = (O, i, j)$, déterminer la nature des courbes du plan définies par l'équation cartésienne suivante dans le repère R :

$$\Gamma_1 : 481x^2 + 384xy + 369y^2 + 2118x - 324y - 2124 = 0,$$

$$\Gamma_2 : 16x^2 - 24xy + 9y^2 + 35x - 20y = 0.$$

On déterminera le centre éventuel, l'équation réduite, les sommets et les foyers ; on dessinera la courbe.

EXERCICE 9.2.

- (1) Diagonaliser les matrices symétriques suivantes au moyen d'une base orthonormale de vecteurs propres :

$$A = \begin{pmatrix} 13 & -2 & -3 \\ -2 & 10 & -6 \\ -3 & -6 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (2) L'espace étant muni d'un repère orthonormé $R = (O, i, j, k)$, déterminer la nature des surfaces de l'espace définies par l'équation cartésienne suivante dans le repère R :

$$Q_1 : 13x^2 + 10y^2 + 5z^2 - 12yz - 6xz - 4xy - 14 = 0,$$

$$Q_2 : 2x^2 + y^2 - 4yz - 4xy + 2x + 2y - 4z + a = 0, \quad (a \text{ réel}),$$

$$Q_3 : 2xy - z = 0.$$

On déterminera le centre éventuel, l'équation réduite, on dessinera la surface.

EXERCICE 9.3. Soit dans l'espace muni d'un repère orthonormé les surfaces d'équations cartésiennes :

$$C_1 : x^2 = 2py, \quad (p > 0),$$

$$C_2 : y^2 + z^2 = 2ay, \quad (a > 0).$$

Déterminer la nature de ces surfaces et calculer le volume de la partie compacte de l'espace qu'elles délimitent.