CORRIGÉS DES TRAVAUX DIRIGÉS DE l'UV MT25

# APPLICATIONS DE L'ALGÉBRE ET DE L'ANALYSE

# À LA GÉOMÉTRIE

**Printemps 2007**

**Jérôme BASTIEN**

Document compilé le 12 février 2013

# Liste des Travaux Dirigés

## Avertissement

On trouvera dans ce polycopié des éléments de correction pour l'UV MT25

Ces éléments de correction sont très succincts, souvent réduits à la représentation des courbes à étudier, et non exhaustifs.

Ce polycopié est disponible en ligne sur le site `http://utbmjb.chez-alice.fr/UTBM/index.html`

On y trouvera aussi quelques exemples de fonctions et de script matlab.

# Courbes paramétrées

Correction de l'exercice 1.1.

(1) Par périodicité et symétrie, on étudie la courbe sur l'intervalle $[0, \pi]$, puis effecter une symétrie par rapport à l'axe $Oy$.

(2) On a
$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \frac{y'(t)}{x'(t)} = +\infty,$$
et donc la tangente est verticale. Par symétrie, il s'agit d'un point de rebroussement de première espèce.

Correction de l'exercice 1.2.

(1) La droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe en $t = \pm\infty$. De plus, la courbe est au dessus de cette droite en $-\infty$ et en dessous en $+\infty$.

(2) De
$$x(t) = t + \frac{9}{t} + o\left(\frac{1}{t}\right),$$
$$y(t) = t + 1 + \frac{3}{t} + o\left(\frac{1}{t}\right),$$
pour $t \to \pm\infty$, on déduit
$$y(t) = x(t) + 1 - \frac{6}{t} + o\left(\frac{1}{t}\right) = x(t) + 1 - \left(\frac{6}{t} + o\left(\frac{1}{t}\right)\right),$$
dont on déduit la même conclusion, plus rapidement.

Correction de l'exercice 1.4.
Les équations $x(t_1) = x(t_2)$ et $y(t_1) = (t_2)$ fournissent
$$(t_1 - t_2)(2t_1t_2 - t_1 - t_2 + 2) = 0,$$
$$(t_1 - t_2)(t_1t_2 - t_1 - t_2) = 0.$$
En simplifiant par $t_1 - t_2$ et en posant $p = t_1t_2$ et $s = t_1 + t_2$, on aboutit à : $p = -2$ et $s = 2$ et donc à
$$\boxed{t_1 = -1 - \sqrt{3}, \quad t_2 = -1 + \sqrt{3}},$$
$$\boxed{x = -1, \quad y = -2}.$$

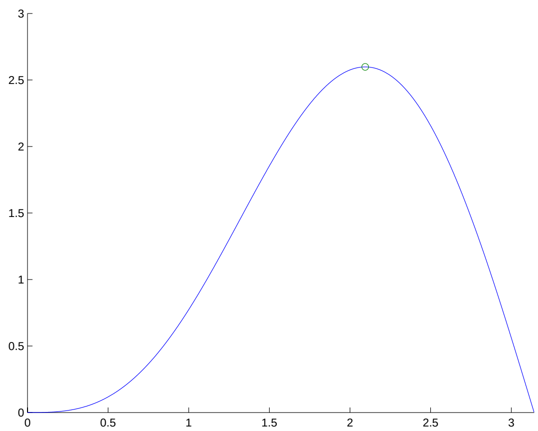
Correction de l'exercice 1.5.
Voir figure 1.1 page 7 et le script matlab `TDcpm_exo5.m` disponible sur le ouaib.

Correction de l'exercice 1.6.
Voir figure 1.2 page suivante et le script matlab `TDcpm_exo6.m`.

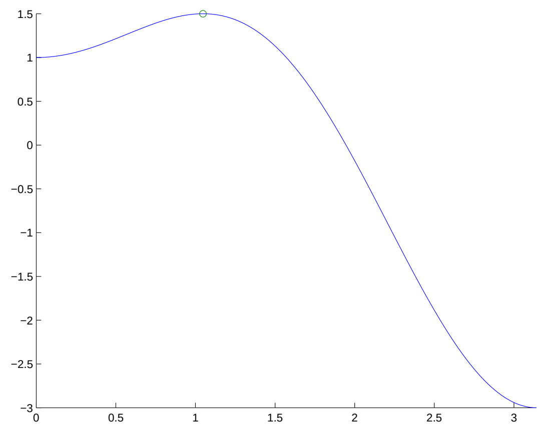
Correction de l'exercice 1.7.
Voir figure 1.3 page 8 et le script matlab `TDcpm_exo7.m`.

Correction de l'exercice 1.8.
Voir figure 1.4 page 8 et le script matlab `TDcpm_exo8.m`.

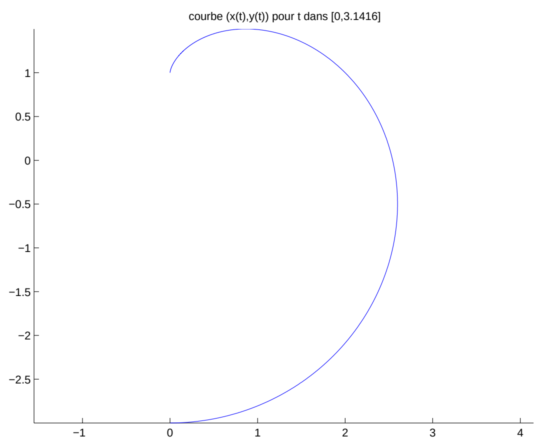
## Ensemble des figures



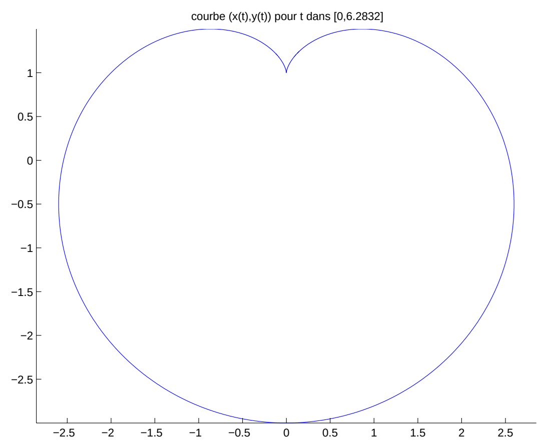
(a) La fonction $t \mapsto x(t)$ sur $[0, \pi]$.



(b) La fonction $t \mapsto y(t)$ sur $[0, \pi]$.




(c) La courbe $(x(t), y(t))$ pour $t$ décrivant $[0, \pi]$.




(d) La courbe $(x(t), y(t))$ pour $t$ décrivant $[0, 2\pi]$.

FIGURE 1.1. Diverses courbes relatives à l'exercice 1.5.

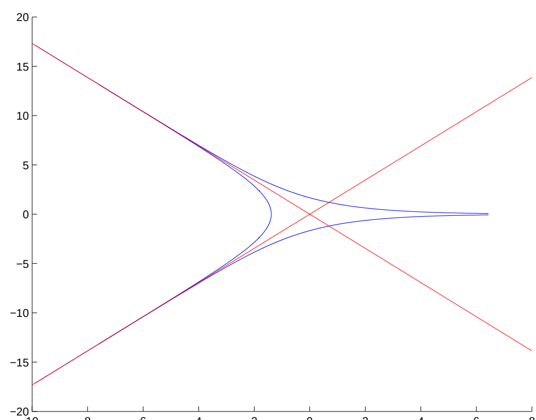


FIGURE 1.2. La courbe $(x(t), y(t))$ de l'exercice 1.6.

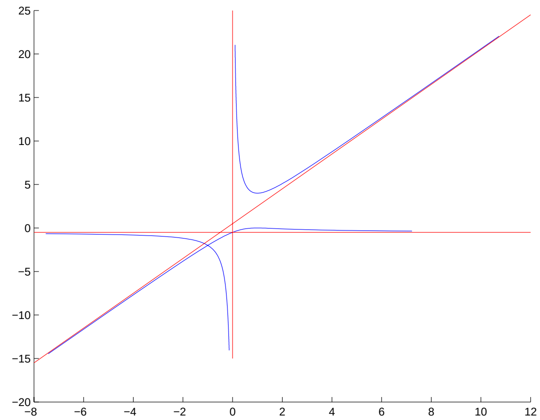



FIGURE 1.3. La courbe $(x(t), y(t))$ de l'exercice 1.7.

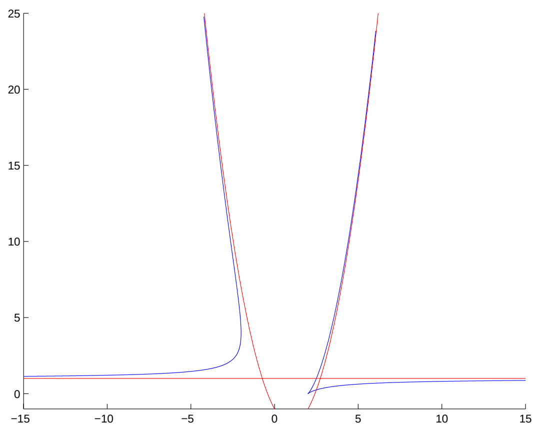



FIGURE 1.4. La courbe $(x(t), y(t))$ de l'exercice 1.8.

# Courbes paramétrées en coordonnées polaires

Correction de l'exercice 2.2.
On a, en posant $u = \pi - \theta$,

$$\sin(\theta - \pi) r(\theta) = -\frac{\sin u}{\sin(u/2)} \sim -\frac{1}{2},$$

expression qui est négative au voisinage de $\theta = \pi$ et qui tend vers $-2$ quand $u$ tend vers zéro.

Correction de l'exercice 2.3.
Voir la figure 2.1 page suivante et le script matlab `TDcpmpo_exo3.m` disponible sur le ouaib.

Correction de l'exercice 2.4.
Voir la figure 2.2 page suivante .

Correction de l'exercice 2.5.
Voir figure 2.3 page 11 et le script matlab `TDcpmpo_exo5.m`, disponible sur le ouaib.

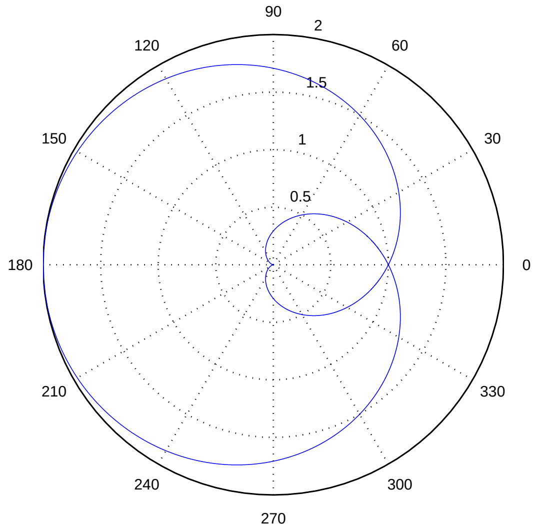
Correction de l'exercice 2.6.
On montre qu'une équation polaire est

$$\boxed{r(\theta) = 2a\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta},} \tag{2.1}$$

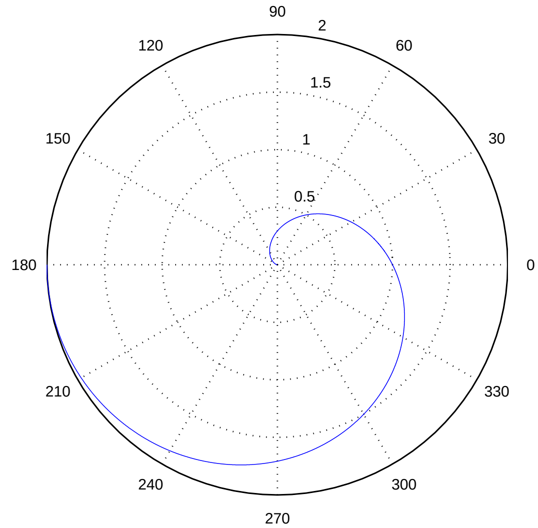
où $\theta$ décrit $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + \pi\mathbb{Z}\}$.
Voir figure 2.4 page 11 (pour $a = 1$) et le script matlab `TD2_exo5`, disponible sur le ouaib.

Correction de l'exercice 2.7.
Voir le script matlab `TDcpmpo_exo7.m`, disponible sur le ouaib.

## Ensemble des figures

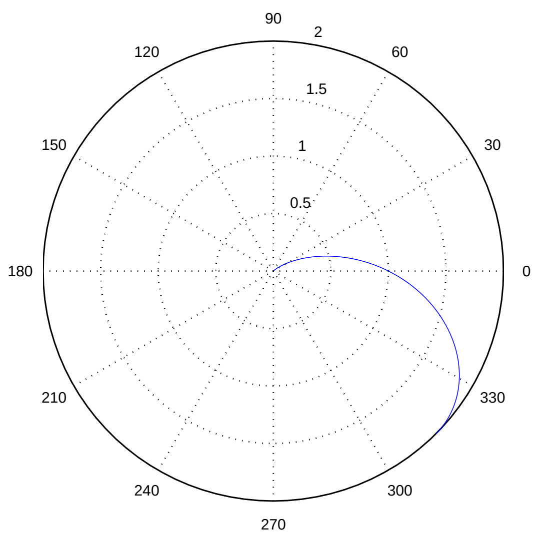



(a) La courbe définie en polaire pour $\theta \in [-\pi, \pi]$.

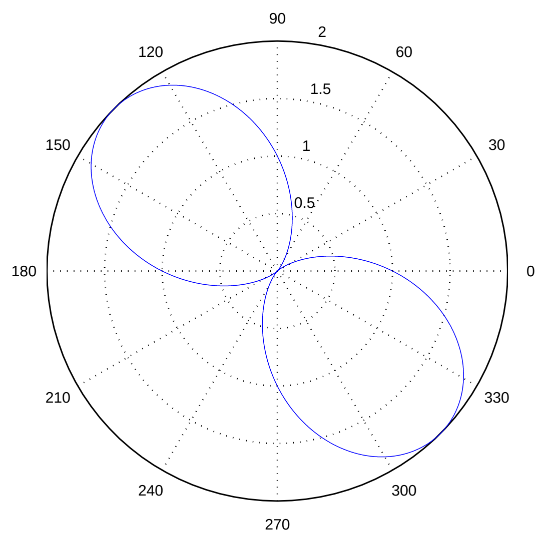



(b) La courbe définie en polaire pour $\theta \in [-2\pi, 2\pi]$.

Figure 2.1. Diverses courbes relatives à l'exercice 2.3.

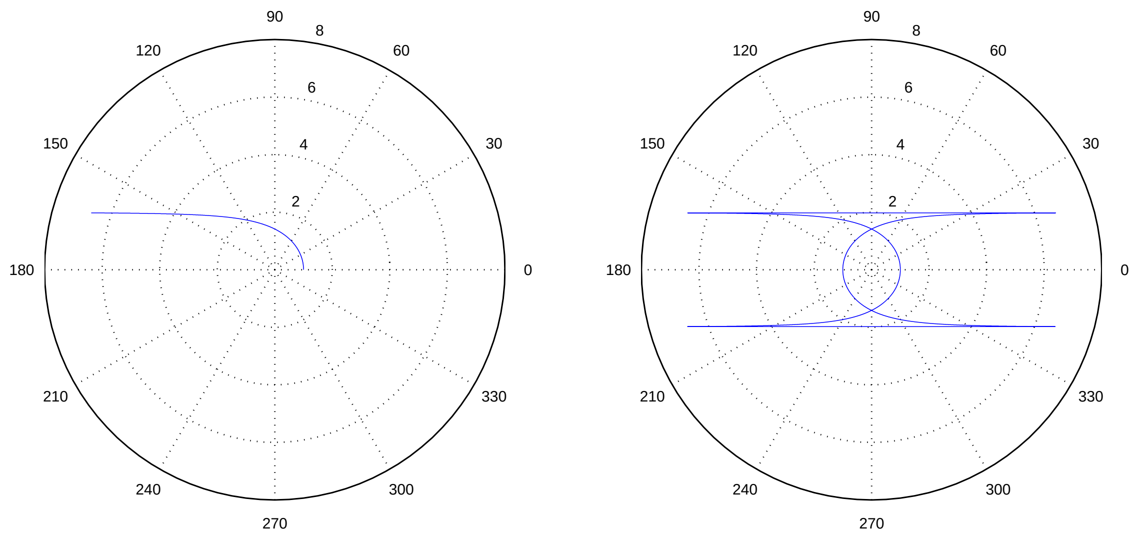



(a) La courbe définie en polaire pour $\theta \in [-\pi/4, \pi/4]$.




(b) La courbe définie en polaire pour $\theta \in [-\pi, \pi]$.

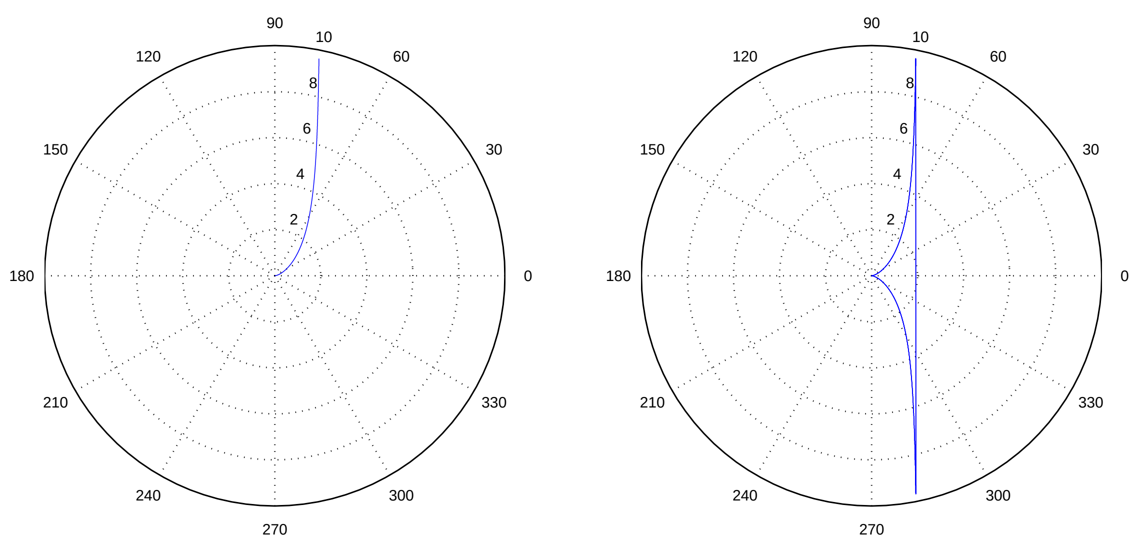
Figure 2.2. Diverses courbes relatives à l'exercice 2.4.




(a) La courbe définie en polaire pour $\theta \in [0, \pi[$.

(b) La courbe définie en polaire pour $\theta \in [-2\pi, -\pi[\cup] - \pi, \pi[\cup]\pi, 2\pi]$.

FIGURE 2.3. Diverses courbes relatives à l'exercice 2.5.




(a) La courbe définie en polaire pour $\theta \in [0, \pi/2[$.

(b) La courbe définie en polaire pour $\theta \in ]-\pi/2, \pi/2[$.

FIGURE 2.4. Diverses courbes relatives à l'exercice 2.6 pour $a = 1$.

CORRECTION DU TRAVAUX DIRIGÉS 3

## Propriétés métriques des courbes paramétrées

Correction de l'exercice 3.1.

(1) Puisque la longueur de l'arc de cercle $IM$ et la distance $OI$ sont égales, on sait que

$$MI = at = OI = x_\Omega.$$

Par définition de l'angle $t$, on a

$$\overrightarrow{\Omega M} = -a\left(\sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j}\right).$$

On a, d'autre part,

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{I\Omega} + \overrightarrow{\Omega M},$$

et donc

$$\overrightarrow{OM} = at\vec{i} + a\vec{j} - a\left(\sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j}\right).$$

On a donc

$$\overrightarrow{OM} = a\,(t - \sin t)\,\vec{i} + a\,(1 - \cos t)\,\vec{j},$$

et donc

$$x(t) = a(t - \sin t), \tag{3.1a}$$

$$y(t) = a(1 - \cos t). \tag{3.1b}$$

(2) Pour toute la suite, on pose

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F(t) = \big(a(t - \sin t), a(1 - \cos t)\big). \tag{3.2}$$

– Remarquons que, pour tout $t$, on a

$$F(t + 2\pi) = \big(a(t - \sin t), a(1 - \cos t)\big) + 2\pi a\vec{i} = F(t) + 2\pi a\vec{i}.$$

On peut donc étudier la courbe sur $[0, 2\pi]$ ; on aura la totalité de la courbe en faisant des translations de vecteur $2\pi ak\vec{i}$, pour $k \in \mathbb{Z}$.
D'autre part, si $t \in [0, \pi]$, alors $2\pi - t \in [\pi, 2\pi]$ et

$$\frac{1}{2}\left(x(2\pi - t) + x(t)\right) = \pi a,$$
$$y(2\pi - t) = y(t),$$

et on peut donc se restreindre à l'intervalle $[0, \pi]$ en faisant une symétrie par rapport à la droite d'équation $x = \pi a$.

– Il est clair que

$$\boxed{x'(t) = a(1-\cos t)}, \tag{3.3a}$$

$$\boxed{y'(t) = a\sin t}. \tag{3.3b}$$

On en déduit le tableau de variation de $x$ et $y$ :

| $t$ | $0$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|
| $x'$ | $0$ | $+$ | $>0$ |
| $y'$ | $0$ | $+$ | $0$ |
| $x$ | $0$ | $\nearrow$ | $a\pi$ |
| $y$ | $0$ | $\nearrow$ | $2a$ |

Le seul point stationnaire correspond à $t=0$, pour lequel on a

$$\frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\sin t}{1-\cos t} = \frac{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{1}{\tan\left(\frac{t}{2}\right)},$$

dont la limite pour $t$ tendant vers zéro vaut l'infini.

On a donc

$$\boxed{\text{Une tangente verticale pour } t=0.} \tag{3.4}$$

– Voir la figure 3.1 page ci-contre obtenue par matlab `TDcpmme_exo1.m`.

(3) Voir le script `TDcpmme_exo1.m`. On obtient

$$\boxed{L = 8a.} \tag{3.5}$$

## Ensemble des figures

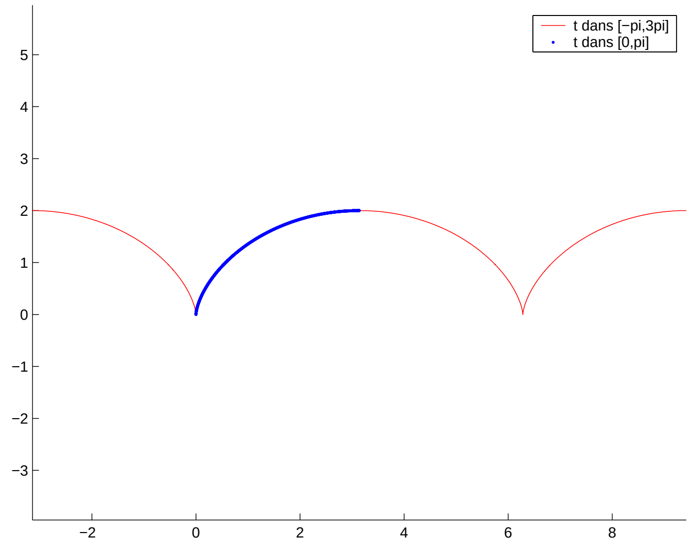



FIGURE 3.1. La courbe $F$ pour $a = 1$ pour $t \in [-\pi, 3\pi]$.