MT25 Printemps 2005

Examen final du 24 juin 2005

Durée : 2 heure(s)

On rendra une copie (au moins et même blanche) pour chacun des deux exercices.

Exercice 1 (Intégrale multiple).

1.

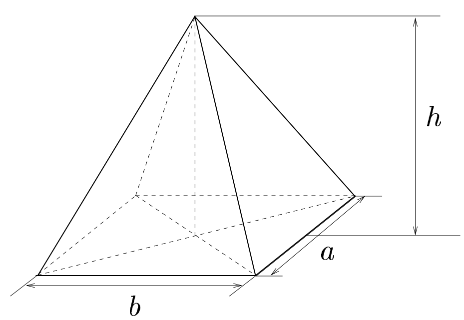

FIG. 1 – Une pyramide régulière de hauteur h et de dimension de base a et b.

Calculer le volume de la pyramide régulière représentée sur la figure 1.

2. On cherche maintenant à généraliser le calcul précédent de façon à pouvoir l'appliquer à un cône quelconque.

   Soit $\mathcal{D}$ est une partie fermée, bornée et «régulière» d'un plan $\mathcal{P}$, de surface S_0 et Ω un point quelconque de l'espace. On définit le cône de sommet Ω et de contour $\mathcal{D}$, comme le volume de l'espace limité par $\mathcal{D}$ et par la surface définie par l'ensemble des segments $[\Omega M]$ où M décrit la frontière $\partial\mathcal{D}$ de $\mathcal{D}$ (voir figure 2 page suivante). On note h, la hauteur du cône, c'est-à-dire, la distance de Ω au plan $\mathcal{P}$.

   (a) Justifier sommairement qu'à la hauteur $z \in [0, h]$, la surface $S(z)$ de la portion de plan $\mathcal{D}(z)$ se trouvant à l'intérieur du cône est donnée par

$$S(z) = S_0 \left(\frac{h-z}{h}\right)^2. \tag{1}$$

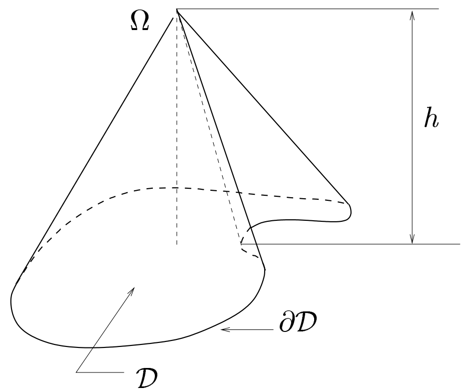

FIG. 2 – Un cône de contour $\mathcal{D}$ et de hauteur h.

(b) En déduire, en utilisant une intégrale triple, que le volume V du cône est égal à

$$V = \frac{1}{3}S_0 h. \tag{2}$$

3. **Question bonus**

Le but de cette question est de montrer rigoureusement l'égalité (1).

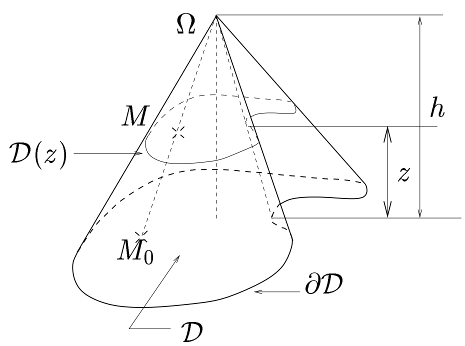

FIG. 3 – Un cône de contour $\mathcal{D}$ et de hauteur h et les points $M_0(x_0, y_0, 0)$ et $M(x, y, z)$.

À Chaque point $M_0(x_0, y_0, 0)$ de la surface $\mathcal{D}$, on associe un point $M(x, y, z)$ de la surface $\mathcal{D}(z)$ grâce à

$$\overrightarrow{\Omega M_0} = \alpha(z)\overrightarrow{\Omega M}, \tag{3}$$

où $\alpha(z)$ est un réel (voir figure 3).

(a) Montrer que

$$\forall z \in [0, h[, \quad \alpha(z) = \frac{h}{h-z}. \tag{4}$$

(b) En déduire que

$$\forall z \in [0,h], \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{h-z}{h}(x_0 - x_\Omega) + x_\Omega, \\ \\ y = \dfrac{h-z}{h}(y_0 - y_\Omega) + y_\Omega. \end{array} \right. \tag{5}$$

(c) Justifier l'égalité suivante

$$\iint_{\mathcal{D}} dx_0 dy_0 = \iint_{\mathcal{D}(z)} |J(x,y)|\, dx dy, \tag{6}$$

et calculer la valeur du jacobien $J(x,y)$.

(d) Conclure.

Exercice 2 (Diagonalisation de matrices symétriques et quadrique)**.**

1. (a) Diagonaliser la matrice

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

sous la forme $A = QD^tQ$ où

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} \text{ et } Q = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ * & * \end{pmatrix}. \tag{8}$$

(b) En déduire que, pour tout $c \in \mathbb{R}_+^*$, la courbe plane d'équation

$$x^2 + y^2 - xy - c^2 = 0, \tag{9}$$

est une ellipse. Définir les axes de cette ellipse. Faire une figure.

2. Soit la matrice

$$B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

On admettra que ses trois valeurs propres sont $\{3/2, 3/2, 0\}$.

(a) Montrer qu'on peut choisir une base orthonormale de trois vecteurs propres (u_1, u_2, u_3) de B telle que

$$u_3 = \frac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

(b) On considère alors le nouveau repère (u_1, u_2, u_3). À tout point M de l'espace, de coordonnées (x,y,z) dans le repère canonique $(0, e_1, e_2, e_3)$, on associe (X,Y,Z) les coordonnées de ce même point dans le repère $(0, u_1, u_2, u_3)$.

Pour toute la suite, c désigne un réel strictement positif.

On pose

$$\Phi(M) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx - c^2. \tag{12}$$

Montrer que

$$\Phi(M) = \frac{3}{2}\left(X^2 + Y^2\right) - c^2. \tag{13}$$

3. Dans cette question, on étudie la surface $\mathcal{C}$ de l'espace d'équation

$$\Phi(M) = 0. \tag{14}$$

   (a) Déduire de la question 1, l'intersection de $\mathcal{C}$ avec le plan $Z = 0$. Faire une figure.

   (b) Déduire de la question 2 la nature de la surface $\mathcal{C}$.
   Faire une figure.

4. **Question bonus**

   À tout point M de l'espace, de coordonnées (x, y, z) dans le repère canonique, on associe (X, Y, Z) les coordonnées de ce même point dans le repère (u_1, u_2, u_3).

   On pose, pour tout point M de l'espace, de coordonnées (x, y, z)

$$\Psi(M) = \max\left(|x-y|, |y-z|, |z-x|\right) - c. \tag{15}$$

   On admettra que la matrice B définie par (10) peut être diagonalisée sous la forme sous la forme $B = QD'^tQ$ où

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \text{ et } D' = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

   (a) Montrer, en utilisant les notations de la question 2b, que

$$\Psi(M) = \max\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left|-\sqrt{3}X + Y\right|, \frac{\sqrt{2}}{2}\left|\sqrt{3}X + Y\right|, \sqrt{2}\,|Y|\right) - c. \tag{17}$$

   (b) On étudie maintenant la surface $\mathcal{D}$ de l'espace d'équation

$$\Psi(M) = 0. \tag{18}$$

   Quelle est la nature de l'intersection de $\mathcal{D}$ avec le plan $Z = 0$? On pourra montrer que la figure obtenue est un polygone régulier.
   Faire une figure.

   (c) Quelle est la nature de la surface $\mathcal{D}$?
   Faire une figure.

   (d) Quels liens existent-ils entre les deux surfaces $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$?

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur `http://utbmjb.chez.tiscali.fr/`