

Une feuille de notes recto verso est autorisée

L'épreuve se compose de quatre exercices

Exercice1

Soit la fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie par $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$

- 1) Rechercher les points critiques de f , c'est-à-dire les points où les dérivées partielles d'ordre 1 s'annulent.
- 2) Déterminer les extrema locaux de f et préciser si ce sont des maxima ou des minima.

Exercice2

On considère le domaine D de \mathbb{R}^3 défini par les 4 inéquations : $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, et $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$. Ce domaine est homogène de masse volumique égale à 1.

- 1) On utilise les coordonnées sphériques (ρ, θ, φ) avec θ longitude et φ latitude. Déterminer le domaine Δ décrit par (ρ, θ, φ) et le jacobien associé à ce changement de variables.
- 2) En déduire :
 - a) la masse M de D
 - b) le moment d'inertie I de D par rapport à $z'Oz$ et le rapport I/M
 - c) les coordonnées du centre d'inertie G de D .
 - d) Le moment d'inertie J de D par rapport à la droite (OG) : on montrera que la distance d du point M à la droite (OG) vérifie $d^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (x + y + z)^2 / 3$

TSVP

Exercice 3

Calculer l'intégrale double $I = \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$

Avec $D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, y \geq 0, x^2 + y^2 - 2x \leq 0 \}$

On dessinera D et on utilisera un changement de variables en coordonnées polaires.

Exercice 4

L'espace vectoriel euclidien E de dimension 3 est muni d'une base orthonormée directe $B = (i, j, k)$.

Soit un vecteur u normé de E de coordonnées (a, b, c) dans la base B :

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

On considère l'endomorphisme f de E dont la matrice A dans la base B est égale à

$$A = \begin{bmatrix} a^2 & ab-c & ac+b \\ ab+c & b^2 & bc-a \\ ac-b & bc+a & c^2 \end{bmatrix}$$

- 1) Vérifier que le produit de matrices $A^t A$ est égal à I_3 .
- 2) Vérifier que $f(u) = u$
- 3) Montrer que f est une rotation ; préciser son axe et son angle.