

MT25 EXAMEN FINAL P 07

L'épreuve se compose de trois exercices indépendants. Une calculatrice et une feuille de notes recto verso sont autorisées

Exercice 1

Soit l'application f de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R} définie par $f(x, y, z) = xyz(4 - x - y - z)$
On recherche les extremums de f non situés dans un plan de coordonnées xOy , yOz et xOz .

- 1) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f et démontrer qu'il existe un seul point critique $a = (x, y, z)$ tel que $xyz \neq 0$
- 2) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f et vérifier que la matrice hessienne de f en a est égale à

$$H = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Calculer ses valeurs propres ; quels sont leurs

signes ? Conclure.

Exercice 2

L'espace E est muni d'un repère orthonormé (O, i, j, k) . Soit les réels $a > 0$ et $h_2 > h_1 > 0$ et les deux points A et B de coordonnées

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ h_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ h_2 \end{pmatrix}$$

On considère le plan P passant par A et B et parallèle à $x'Ox$ et le

cylindre de révolution C d'équation cartésienne $x^2 + y^2 = a^2$

Soit D le domaine de l'espace E situé à l'intérieur du cylindre C , au dessus du plan xOy et en dessous du plan P .

- 1) Représenter D en perspective ainsi que ses projections sur les deux plans xOy et yOz .
- 2) Calculer l'équation cartésienne de la droite AB dans le plan yOz
- 3) Calculer le volume V de D . On contrôlera son résultat en considérant ce que représentent le domaine D complété par un autre domaine D' de même volume mis bout à bout.
- 4) On veut déterminer le centre d'inertie G de D supposé homogène
 - a) Quelle coordonnée de G est évidente ?

b) Montrer que
$$\iiint_D y \, dx \, dy \, dz = \iint_{\Delta} \left(\frac{h_1 - h_2}{2a} y^2 + \left(\frac{h_1 + h_2}{2} \right) y \right) dx \, dy$$

Avec $\Delta = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq a^2 \}$ et terminer le calcul par un changement de variables en coordonnées polaires.

c) Calculer de la même façon $\iiint_D z \, dx \, dy \, dz$

d) En déduire les coordonnées de G.

Exercice 3

On considère l'espace vectoriel euclidien $(E = \mathbb{R}^4, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ muni du produit scalaire usuel pour lequel la base canonique B de E est orthonormée :

Si $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ et $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ on a $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4$

Soit $F = \{ x \in E / x_1 - x_2 = 0, x_3 + x_4 = 0 \}$

- 1) Montrer que F est un sous espace vectoriel de E de dimension deux et donner une base orthogonale (v_1, v_2) de F.
- 2) Soit p la projection orthogonale de E sur F. Montrer que

$$\forall x \in E, p(x) = \frac{\langle x, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \frac{\langle x, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2$$

- 3) En déduire la matrice de l'endomorphisme p dans la base B.
- 4) Calculer la distance du vecteur $W = (1, 2, 3, 4)$ à F.
- 5) L'endomorphisme p est-il orthogonal ?
- 6) L'endomorphisme p est-il symétrique, c'est-à-dire vérifie-t-il la propriété :

$$\forall (x, y) \in E, \langle p(x), y \rangle = \langle x, p(y) \rangle ?$$