

Corrigé de l'examen final du 24 juin 2005

**Correction de l'exercice 1.**

1. On intègre le volume  $V$  de la pyramide (qui occupe la région  $P$  de l'espace) par des sections planes de hauteur  $z$  constante :

$$V = \iiint_P dx dy dz = \int_{z=0}^{z=h} \left( \iint_{\mathcal{D}(z)} dx dy \right) dz, \quad (1)$$

où  $\mathcal{D}(z)$  désigne l'ensemble des points de  $P$  à la côte  $z$ . Notons  $S(z)$  la surface de  $\mathcal{D}(z)$  ; il vient donc

$$V = \int_0^h S(z) dz. \quad (2)$$

Un simple raisonnement géométrique nous montre que

$$S(z) = ab \left( \frac{h-z}{h} \right)^2. \quad (3)$$

Ainsi, en posant  $u = (h-z)/h$ , il vient (puisque  $du = -dz/h$ )

$$V = \int_0^h S(z) dz = ab \int_0^h \left( \frac{h-z}{h} \right)^2 dz = hab \int_0^1 u^2 du, \quad (4)$$

soit

$$V = \frac{1}{3} abh. \quad (5)$$

*Remarque 1.* Si on pose  $S_0 = ab$  on retrouve la formule bien connue (et qui va être démontrée dans les questions 2 et 3) :

$$V = \frac{1}{3} S_0 h. \quad (6)$$

2. (a) Comme pour (3), on peut observer que la surface  $S(z)$  est une fonction quadratique (en carré) de  $z$ , puisque les longueurs sont linéaires en  $z$ .  $S(z)$  est nulle pour  $z = h$  et égale à  $S_0$  pour  $z = 0$  ; on a donc une formule analogue à l'équation (3) :

$$\forall z \in [0, h], \quad S(z) = S_0 \left( \frac{h-z}{h} \right)^2. \quad (7)$$

Cette formule sera démontrée rigoureusement à la question 3.

(b) Puisque (2) demeure valable, on conclue par un calcul similaire à (4) :

$$V = \int_0^h S(z) dz = S_0 \int_0^h \left( \frac{h-z}{h} \right)^2 dz = S_0 h \int_0^1 u^2 du,$$

et on retrouve donc (6).

3.

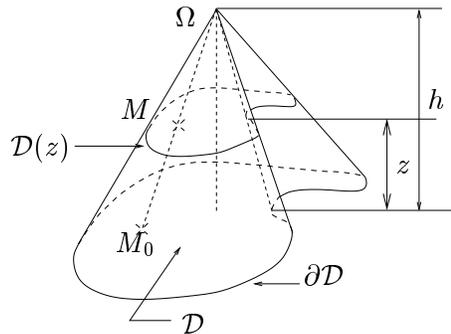


FIG. 1 – Un cône de contour  $\mathcal{D}$  et de hauteur  $h$  et les points  $M_0(x_0, y_0, 0)$  et  $M(x, y, z)$ .

À Chaque point  $M_0(x_0, y_0, 0)$  de la surface  $\mathcal{D}$ , on associe un point  $M(x, y, z)$  de la surface  $\mathcal{D}(z)$  grâce à

$$\overrightarrow{\Omega M_0} = \alpha(z) \overrightarrow{\Omega M}, \quad (8)$$

où  $\alpha(z)$  est un réel (voir figure 1).

(a) La troisième composante de l'équation (8) fournit

$$z_{M_0} - z_{\Omega} = \alpha(z)(z_M - z_{\Omega}),$$

et donc

$$-h = \alpha(z)(z - h),$$

soit

$$\boxed{\forall z \in [0, h[, \quad \alpha(z) = \frac{h}{h-z}.} \quad (9)$$

(b) La première composante de l'équation (8) fournit

$$x_{M_0} - x_{\Omega} = \alpha(z)(x_M - x_{\Omega}),$$

soit

$$x_0 - x_{\Omega} = \alpha(z)(x - x_{\Omega}),$$

soit, compte tenu de (9),

$$x = \frac{h-z}{h}(x_0 - x_{\Omega}) + x_{\Omega}.$$

On raisonne de même pour  $y$  et on obtient

$$\forall z \in [0, h[, \quad \begin{cases} x = \frac{h-z}{h}(x_0 - x_\Omega) + x_\Omega, \\ y = \frac{h-z}{h}(y_0 - y_\Omega) + y_\Omega. \end{cases}$$

Puisque cette dernière équation est valable pour  $z = h$ , on a donc

$$\boxed{\forall z \in [0, h], \quad \begin{cases} x = \frac{h-z}{h}(x_0 - x_\Omega) + x_\Omega, \\ y = \frac{h-z}{h}(y_0 - y_\Omega) + y_\Omega. \end{cases}} \quad (10)$$

- (c) Soit  $z$  fixé. On dispose donc d'une application  $\Psi$  de  $\mathcal{D}(z)$  dans  $\mathcal{D}$  qui à  $(x, y)$  associe  $(x_0, y_0)$ . On a  $\Psi(\mathcal{D}(z)) = \mathcal{D}$  et la formule de changement de variables nous donne donc

$$\boxed{\iint_{\mathcal{D}} dx_0 dy_0 = \iint_{\mathcal{D}(z)} |J(x, y)| dx dy.} \quad (11)$$

où  $J$  est le Jacobien de  $\Psi$ .

Il est défini par

$$J(x, y) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_0}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial x_0}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial y_0}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial y_0}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}.$$

Il faut donc calculer  $x_0$  et  $y_0$  en fonction de  $x$  et de  $y$  (ce qui n'est guère difficile); mais, il est plus rapide de remarquer que le Jacobien  $J$  est l'inverse du Jacobien de la fonction réciproque de  $\Psi$ . On a, selon (10),  $(x, y) = \Psi^{-1}(x_0, y_0)$  où  $x$  et  $y$  sont connus en fonction de  $x_0$  et  $y_0$ . On vérifie que

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial x_0} &= \frac{h-z}{h}, \\ \frac{\partial x}{\partial y_0} &= 0, \\ \frac{\partial y}{\partial x_0} &= \frac{h-z}{h}, \\ \frac{\partial y}{\partial y_0} &= 0, \end{aligned}$$

et donc

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial x}{\partial y_0} \\ \frac{\partial y}{\partial x_0} & \frac{\partial y}{\partial y_0} \end{pmatrix} = \left( \frac{h-z}{h} \right)^2,$$

et en prenant l'inverse, il vient

$$\boxed{J(x, y) = \left( \frac{h}{h-z} \right)^2.} \quad (12)$$

(d) D'après (11) et (12), on a

$$\iint_{\mathcal{D}} dx_0 dy_0 = \iint_{\mathcal{D}(z)} |J(x, y)| dx dy = \iint_{\mathcal{D}(z)} \left( \frac{h}{h-z} \right)^2 dx dy,$$

c'est à dire

$$S_0 = \left( \frac{h}{h-z} \right)^2 S(z),$$

et donc

$$\boxed{S(z) = \left( \frac{h-z}{h} \right)^2 S_0.} \quad (13)$$

On a donc démontré l'égalité (7).

### Correction de l'exercice 2.

*Remarque 2.* Le but de cet exercice est d'étudier la conique d'équation

$$x^2 + y^2 - xy - c^2 = 0, \quad (14)$$

et la quadrique d'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx - c^2 = 0. \quad (15)$$

Ces deux fonctions proviennent de la mécanique des milieux continus (aussi utilisées en Résistance des Matériaux) ; on étudie le comportement d'un point d'un milieu continu qui reçoit un état de contrainte défini par les trois contraintes principales  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  (qui sont la généralisation de la pression au sein d'un liquide) ; on admettra qu'il existe  $\sigma_Y$  qui caractérise l'état du point : on reste en domaine élastique tant que

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1 < \sigma_Y^2. \quad (16)$$

Si on a l'inégalité opposée, on est en domaine plastique. On parle du critère de Von Mises. Si on pose  $x = \sigma_1$ ,  $y = \sigma_2$ ,  $z = \sigma_3$  et  $c = \sigma_Y$ , on constate que la limite entre élasticité et plasticité est donnée par

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx - c^2 = 0,$$

ce qui est exactement (15) ! L'ensemble des points de l'espace définis par cette équation est appelé le cylindre de Von Mises.

Si on s'intéresse à l'intersection de cette surface avec le plan  $z = 0$ , on a

$$x^2 + y^2 - xy - c^2 = 0,$$

ce qui est exactement (14) ! L'ensemble des points du plan définis par cette équation est appelé l'ellipse de Von Mises.

On pourra consulter le chapitre 6 (notamment les pages 105 à 116), l'annexe D (notamment les pages 163 à 165) de [Bas04], ainsi que le corrigé du TD 9 et l'annexe B du corrigé de TD de MT25. Toutes ces documentations sont disponibles sur le web à l'adresse <http://utbmjb.chez.tiscali.fr/>

Plutôt que de refaire un corrigé succinct, je reproduis ici les exemples D.7 et D.8 des pages 164 et 165 de [Bas04] (où  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ , et  $\sigma_Y$  ont été respectivement remplacés par  $x$ ,  $y$ ,  $z$  et  $c$ ).

**Exemple 3.** On étudie dans  $\mathbb{R}^2$  la courbe d'équation

$$x^2 + y^2 - xy = c^2. \quad (17)$$

Ici, on a  $n = 2$  et

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

On peut diagonaliser  $A$  à la main ou sous matlab. Pour cela, il suffit de taper, par exemple :

`A=[2 -1;-1 2]/2;`

`[V,D]=eigs(A);`

ou encore en symbolique

`A=sym([2 -1;-1 2]/2);`

`[V,D]=eig(A);`

On obtient alors (à une permutation près)

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \text{ et } Q = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Ainsi, dans le repère orthonormé lié aux deux bissectrices principales, on obtient une ellipse d'équation

$$\frac{1}{2}y_1^2 + \frac{3}{2}y_2^2 = c^2, \quad (20)$$

dont le demi-grand axe est égal à  $\sqrt{2}c$  et le demi petit axe est égal à  $\sqrt{2/3}c$ . On vérifie aussi que cette ellipse passe par les points  $(B_i)_{1 \leq i \leq 6}$  de coordonnées (définis dans le repère usuel)

$$B_1 = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} -c \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_5 = \begin{pmatrix} -c \\ -c \end{pmatrix}, \quad B_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ -c \end{pmatrix}. \quad (21)$$

On consultera la figure 2(a) page 8.

**Exemple 4.** On étudie dans  $\mathbb{R}^3$  la surface d'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = c^2. \quad (22)$$

Ici, on a  $n = 3$  et

$$B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Comme précédemment, on diagonalise  $B$ . On trouve alors

$$D = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (24)$$

Le nouveau repère est définie par une direction

$$u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (25)$$

et deux autres qui lui sont orthogonales. Ainsi, dans le nouveau repère l'équation devient

$$x^2 + y^2 = \frac{2}{3}c^2. \quad (26)$$

Cette courbe est donc un cylindre de rayon  $\sqrt{2/3}c$  et d'axe  $\Delta$ , droite passant par l'origine et portée par le vecteur de coordonnées  $(1, 1, 1)$ .

On consultera la figure 2(b) page 8.

La question bonus est l'étude de

$$\max(|x - y|, |y - z|, |z - x|) - c = 0. \quad (27)$$

qui correspond au critère de Tresca. L'ensemble des points de l'espace définis par cette équation est appelé le cylindre de Tresca.

Si on s'intéresse à l'intersection de cette surface avec le plan  $z = 0$ , on a

$$\max(|x - y|, |y|, |x|) - c = 0.$$

L'ensemble des points du plan définis par cette équation est appelé l'hexagone de Von Mises.

On renvoie aux pages 107 à 111 et 116 à 119 de [Bas04], ainsi qu'à l'exercice 6.4 page 28 de [ABLM04].

Plutôt que de refaire un corrigé succinct, je reproduis ici quelques figures issues de pages 107 à 111 et 116 à 119 de [Bas04] (voir figure 3 page 9, 4 page 9 et 5 page 10) et l'énoncé de l'exercice 6.4 page 28 de [ABLM04].

**Exercice 1** (Étude du critère de Tresca dans un nouveau repère).

Dans cet exercice, on étudie le cylindre de Tresca dans le repère lié à son axe et on montre la propriété énoncée en cours (voir chapitre 6, page 11 et figure 6.7).

1. On pose

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Montrer que ces trois vecteurs forment une base orthogonale.

2. On considère la base orthonormée  $(u_1, u_2, u_3)$ , obtenue par normalisation des trois vecteurs  $(v_1, v_2, v_3)$ . Tracer sur une figure ces trois vecteurs.
3. On appelle  $(x_1, x_2, x_3)$  les coordonnées d'un point de  $\mathbb{R}^3$  dans la base canonique et  $(y_1, y_2, y_3)$  les coordonnées de ce même point dans la base  $(u_1, u_2, u_3)$ . Montrer que les formules de changement de base donnent :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}y_3, \\ x_2 = -\frac{1}{\sqrt{6}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}y_3, \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}y_3. \end{cases} \quad (29)$$

4. On étudie maintenant la contrainte de Tresca :

$$\sigma_{\text{eq}}^T(x_1, x_2, x_3) = \max_{\substack{i,j \in \{1,2,3\} \\ i \neq j}} |x_i - x_j|. \quad (30)$$

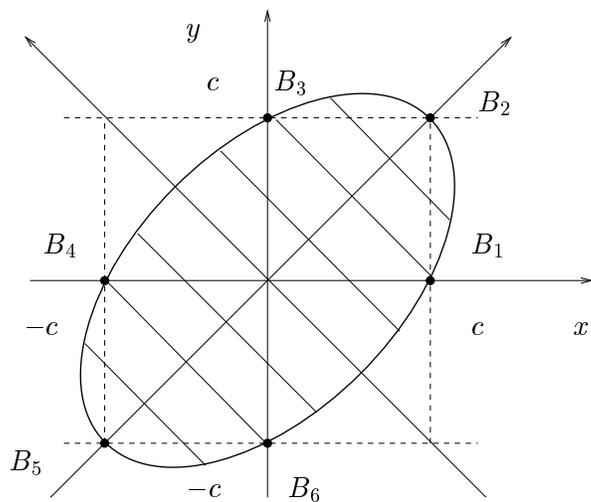
Montrer que, si on se place dans la base  $(u_1, u_2, u_3)$ , on a

$$\sigma_{\text{eq}}^T(y_1, y_2, y_3) = \max \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \left| -\sqrt{3}y_1 + y_2 \right|, \frac{\sqrt{2}}{2} \left| \sqrt{3}y_1 + y_2 \right|, \sqrt{2} |y_2| \right). \quad (31)$$

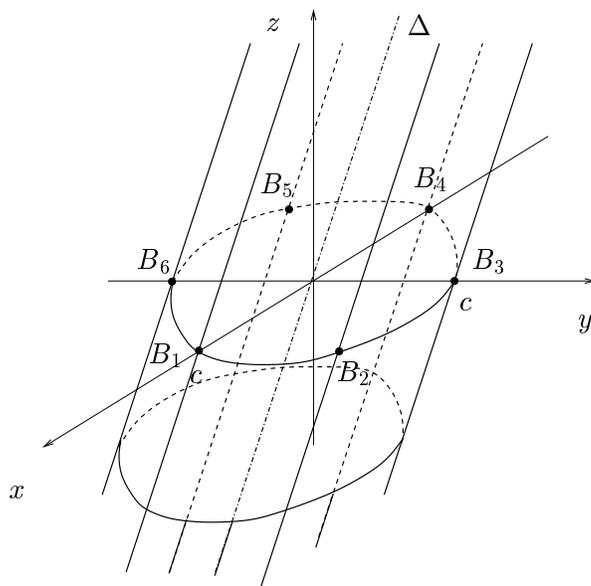
5. (a) En déduire que le cylindre de Tresca a pour axe la droite portée par  $u_3$  et que son intersection avec le plan porté par  $(u_1, u_2)$  est un hexagone, comme indiqué sur la figure 6.7 page 112 du polycopié de cours.
- (b) Montrer que cet hexagone est régulier.
- (c) Montrer que les sommets de cet hexagone appartiennent à l'intersection du cylindre de Von Mises avec le plan porté par  $(u_1, u_2)$ , comme l'indique la figure 6.12 page 118 du polycopié de cours.

## Références

- [ABLM04] K.E Atcholi, J. Bastien, N. Labed et M. Meyer. Résistance des matériaux, Introduction aux calculs des structures. TD de MQ41 de l'UTBM, disponible sur le web : <http://utbmjb.chez.tiscali.fr/>, rubrique MQ41, 2004.
- [Bas04] Jérôme Bastien. Résistance des matériaux, Introduction aux calculs des structures. Notes de cours de MQ41 de l'UTBM, disponible sur le web : <http://utbmjb.chez.tiscali.fr/>, rubrique MQ41, 2004.



(a)



(b)

FIG. 2 – l'Ellipse (a) et le cylindre (b) de Von Mises.

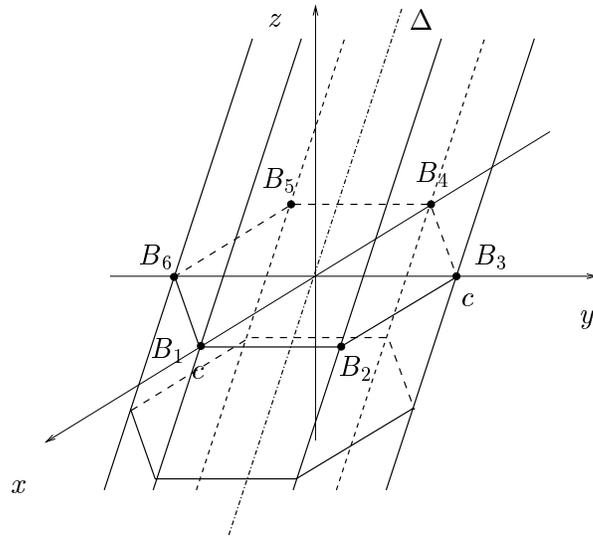
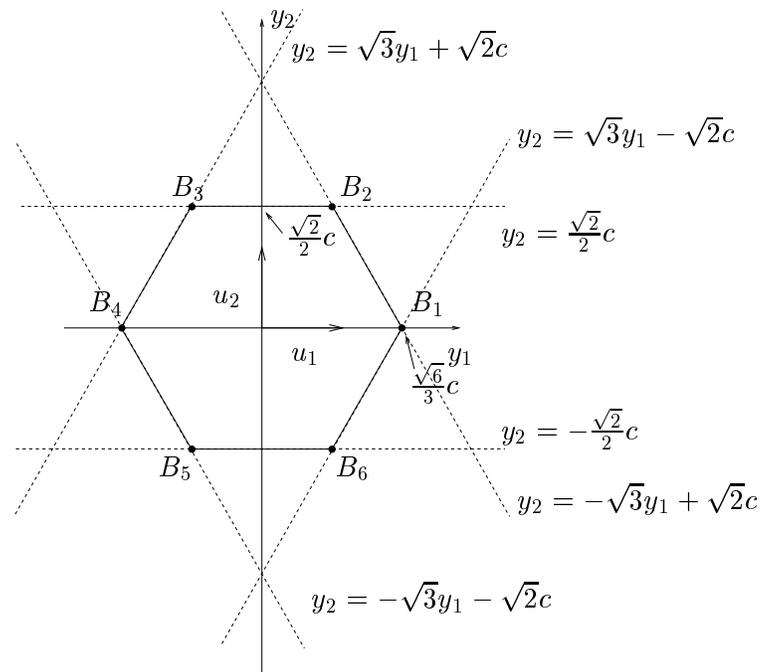


FIG. 3 – Le prisme de Tresca .

FIG. 4 – L'intersection du cylindre de Tresca avec le plan  $\Pi$ , d'équation  $x + y + z = 0$ .

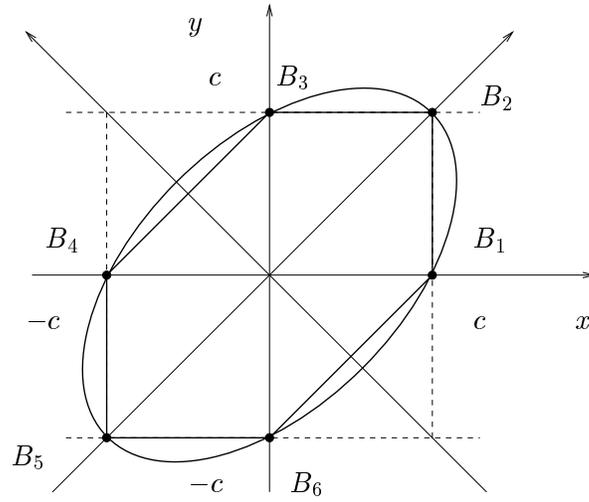


FIG. 5 – L'ellipse de Von Mises et l'hexagone de Tresca.