

Examen de TD du 13 avril 2005

Durée : 1,25 heure(s)

Aucun document autorisé - Calculatrice autorisée. Tout résultat pourrait être admis.

Soit \mathcal{C} la courbe d'équation polaire définie par

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad r(\theta) = \begin{cases} 0, & \text{si } \theta = 0, \\ e^{-1/\theta^2}, & \text{si } \theta \neq 0. \end{cases} \quad (1)$$

1. Sur quel intervalle peut-on étudier la courbe \mathcal{C} ?
2. Étude sur \mathbb{R}_+^* .
 - (a) Déterminer les variations de r sur \mathbb{R}_+^* .
 - (b) Déterminer les points et les tangentes à la courbe correspondant à $\theta \in \{\pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi\}$.

3. **Question facultative** : Étude en zéro.

- (a) Montrer que r est continue en zéro.
- (b)

(i) Montrer que r est dérivable en zéro et que $r'(0)$ est nul. On pourra utiliser (sans le démontrer) le lemme suivant :

Lemme 1. Soient δ un réel strictement positif et g une fonction définie sur $[-\delta, \delta] \setminus \{0\}$. On suppose qu'elle est continue sur $[-\delta, \delta]$, dérivable sur $[-\delta, \delta] \setminus \{0\}$ et que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} g'(x) = l \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Alors g est dérivable en zéro, $g'(0) = 0$ et g' est continue en zéro.

- (ii) Montrer que r est deux fois dérivable en zéro et que $r''(0)$ est nul.
 - (iii) Expliquez en lignes, comment montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, r est p fois dérivable en zéro et que $r^{(p)}(0)$ est nul.
- (c) Pourquoi ne peut-on pas déterminer la tangente à la courbe en ce point en utilisant le résultat usuel du cours ?

- (d) Montrer que la tangente à la courbe \mathcal{C} à l'origine O est portée par l'horizontale. On utilisera la définition de la tangente, comme limite de la corde :

$$\lim_{\substack{\theta \rightarrow 0 \\ \theta \neq 0}} \frac{\overrightarrow{OM}(\theta)}{\|\overrightarrow{OM}(\theta)\|},$$

où $M(\theta)$ est le point défini par θ .

4. Tracer la courbe \mathcal{C} .

5. **Question facultative** : Étude en l'infini.

- (a) Quelle est la nature de l'asymptote en $\theta \rightarrow +\infty$?
 (b) Pour tout $\Theta > 0$, on pose $\varepsilon = 1 - e^{-1/\Theta^2}$. Montrer que

$$\forall \theta \geq \Theta, \quad 1 - \varepsilon \leq r(\theta) < 1 ? \quad (3)$$

Que peut-on en déduire en choisissant par exemple $\Theta = 2\pi$?

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur <http://utbmjb.chez.tiscali.fr/>