

Corrigé de l'examen de TD du 13 avril 2005

Dans tout ce corrigé, nous adopterons les notations usuelles du cours : on note $(\vec{u}_\theta, \vec{u}'_\theta)$ la base locale en polaire. On rappelle que $\vec{u}'_\theta = \vec{u}_{\theta+\pi/2}$. On note $M(\theta)$ le point tel que $\overrightarrow{OM}(\theta) = r(\theta)\vec{u}_\theta$; on note $M_0 = M(\theta_0)$.

On pose

$$\vec{F}(\theta) = r(\theta)\vec{u}_\theta. \quad (1)$$

On rappelle que si r est dérivable en θ , alors

$$\vec{F}'(\theta) = r'(\theta)\vec{u}_\theta + r(\theta)\vec{u}'_\theta. \quad (2)$$

Soit \mathcal{C} la courbe d'équation polaire définie par

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad r(\theta) = \begin{cases} 0, & \text{si } \theta = 0, \\ e^{-1/\theta^2}, & \text{si } \theta \neq 0. \end{cases} \quad (3)$$

1. On étudie *a priori* la courbe \mathcal{C} pour $\theta \in \mathbb{R}$.

Puisque r est paire, on n'étudie \mathcal{C} que pour $\theta \in \mathbb{R}_+$. On fera ensuite une symétrie par rapport à l'axe Ox .

2. (a) On vérifie que r est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* .

- (b) On sait que pour θ non nul, $r(\theta)$ est non nul et le point $M(\theta)$ n'est pas stationnaire. Il a pour coordonnées $(r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta)$. La tangente est définie par (2), formule qui permet de déterminer l'angle entre \vec{u}_θ et $\vec{F}'(\theta)$. En rajoutant à cet angle, la valeur de θ , on obtient l'angle $\alpha(\theta) = \widehat{(\vec{i}, \vec{F}'(\theta))}$, donné par (à π près)

$$\alpha(\theta) = \theta + \text{Atan} \left(\frac{r(\theta)}{r'(\theta)} \right). \quad (4)$$

Pour $\theta \in \{\pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi\}$, les valeurs de $x(\theta)$, $y(\theta)$ et de $\alpha(\theta)$ sont données (en degrés) dans le tableau 1.

3. (a) La fonction r est continue en zéro car «l'exponentielle l'emporte sur toute puissance de θ » et donc

$$\lim_{\substack{\theta \rightarrow 0 \\ \theta \neq 0}} e^{-1/\theta^2} = 0 = r(0).$$

- (b)

θ	$x(\theta)$	$y(\theta)$	$\alpha(\theta)$
$\pi/2$	0	0.6668	152.7
π	-0.9036	0	266.3
$3\pi/2$	0	-0.9560	358.9
2π	0.9750	0	89.53

TAB. 1 – Les valeurs de $x(\theta)$, $y(\theta)$ et de $\alpha(\theta)$ pour $\theta \in \{\pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi\}$.

(i) On rappelle le lemme suivant, fondé sur le théorème des accroissements finis :

Lemme 1. *Soient δ un réel strictement positif et g une fonction définie sur $[-\delta, \delta] \setminus \{0\}$. On suppose qu'elle est continue sur $[-\delta, \delta]$, dérivable sur $[-\delta, \delta] \setminus \{0\}$ et que*

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} g'(x) = l \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Alors g est dérivable en zéro, $g'(0) = l$ et g' est continue en zéro.

La fonction r est C^∞ sur \mathbb{R}^* , et

$$\forall \theta \in \mathbb{R}^*, \quad r'(\theta) = \frac{2}{\theta^3} e^{-1/\theta^2}. \quad (6)$$

On a donc, puisque «l'exponentielle l'emporte sur toute puissance de θ »

$$\lim_{\substack{\theta \rightarrow 0 \\ \theta \neq 0}} r'(\theta) = 0.$$

Le lemme 1 s'applique et donc r est dérivable en zéro avec $r'(0) = 0$. De plus, r' est continue en zéro.

(ii) On vérifie que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}^*, \quad r''(\theta) = R(\theta) e^{-1/\theta^2}, \quad (7)$$

où R est une fraction rationnelle. Ainsi, on a

$$\lim_{\substack{\theta \rightarrow 0 \\ \theta \neq 0}} r''(\theta) = 0.$$

Puisque r' est continue en zéro, on peut appliquer le lemme 1 à la fonction $g = r'$ et on en déduit que r est deux dérivable en zéro avec $r''(0) = 0$.

(iii) En généralisant le raisonnement fait dans les questions 3(b)i et 3(b)ii, on peut montrer par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$ que

$$r \text{ est } p \text{ fois dérivable en zéro ;} \quad (8a)$$

$$r^{(p)}(0) = 0 ; \quad (8b)$$

$$\lim_{\substack{\theta \rightarrow 0 \\ \theta \neq 0}} r^{(p)}(\theta) = 0 ; \quad (8c)$$

$$\forall \theta \in \mathbb{R}^*, \quad r^{(\theta)}(\theta) = R_p(\theta) e^{-1/\theta^2}, \quad (8d)$$

R_p étant une fraction rationnelle de la forme

$$R_p(\theta) = \frac{1}{\theta^{n_p}} q_p(\theta), \quad (8e)$$

où n_p est un entier et q_p un polynôme.

On pourra consulter, pour plus de détails, l'annexe A, page 7.

Remarque 2. Toutes les dérivées de r sont nulles à l'origine : ainsi r est négligeable devant toute puissance de θ en zéro.

(c) Toutes les dérivées de r sont nulles en zéro et on ne peut appliquer le résultat usuel du cours qui utilise la fait qu'il existe une dérivée de r non nulle à l'origine.

(d) On a pour $\theta = 0$,

$$\overrightarrow{M_0 M}(\theta) = \overrightarrow{OM}(\theta) = r(\theta)\vec{u}_\theta.$$

Pour tout θ non nul, $r(\theta)$ est strictement positif ; on a donc

$$\forall \theta > 0, \quad \frac{\overrightarrow{OM}(\theta)}{\|\overrightarrow{OM}(\theta)\|} = \vec{u}_\theta, \quad (9a)$$

$$\forall \theta < 0, \quad \frac{\overrightarrow{OM}(\theta)}{\|\overrightarrow{OM}(\theta)\|} = \vec{u}_\theta. \quad (9b)$$

On en déduit que

$$\lim_{\substack{\theta \rightarrow 0 \\ \theta > 0}} \frac{\overrightarrow{OM}(\theta)}{\|\overrightarrow{OM}(\theta)\|} = \vec{u}_0,$$

$$\lim_{\substack{\theta \rightarrow 0 \\ \theta < 0}} \frac{\overrightarrow{OM}(\theta)}{\|\overrightarrow{OM}(\theta)\|} = \vec{u}_0.$$

Ainsi, la tangente à la courbe \mathcal{C} à l'origine est portée par $\vec{u}_0 = \vec{i}$.

On pourra consulter, pour plus de détails, l'annexe B, page 8.

4. On consultera les courbes de la figure 1 page suivante.

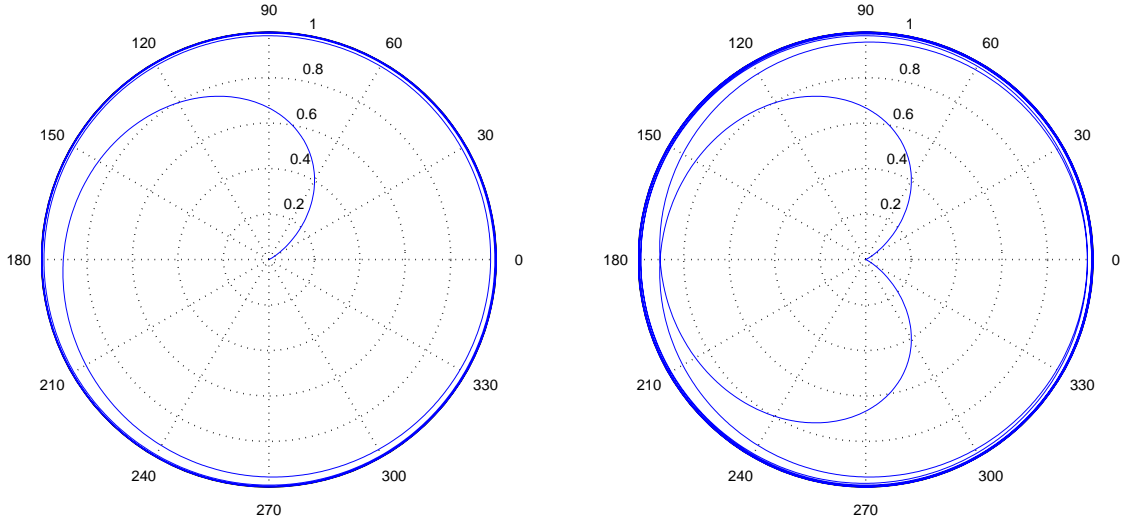
Remarque 3. Sur les figures 1(a) et 1(b), la tangente ne semble pas être horizontale en l'origine, ce qui contredirait les résultats de la question 3d. Plus précisément, la tangente à la courbe sur les courbes des figures 1(a) et 1(b), la tangente semble faire un angle d'environ 30° avec l'origine..

Ce phénomène peut s'expliquer de la façon suivante. Les équations (4) et (6) fournissent l'angle entre \vec{i} et la tangente à la courbe

$$\alpha(\theta) = \theta + \text{Atan}\left(\frac{\theta^3}{2}\right). \quad (10)$$

D'autre part, on sait que

$$OM(\theta) = \|\overrightarrow{OM}(\theta)\| = r(\theta) = e^{-1/\theta^2}. \quad (11)$$



(a) La courbe définie en polaire pour $\theta \in [0, 40]$.

(b) La courbe définie en polaire pour $\theta \in [-40, 40]$.

FIG. 1 – La courbe \mathcal{C} pour différents intervalles contenant θ .

Puisque r décroît «très vite» vers zéro quand θ tend vers zéro, la distance $OM(\theta)$ sera numériquement nulle pour des valeurs non nulles de θ . On peut écrire pour θ tendant vers zéro, grâce à (10),

$$\alpha(\theta) \sim \theta + \frac{\theta^3}{2} \sim \theta.$$

Numériquement, on peut écrire formellement¹ pour θ «petit» :

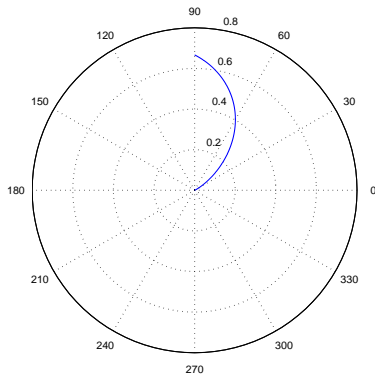
$$OM(\theta) = e^{-1/\theta^2} \approx 0, \quad \alpha(\theta) \approx \theta. \quad (12)$$

θ	$r(\theta)$	$\alpha(\theta)$
1	0	1
5	$9.371 \cdot 10^{-58}$	5.019
10	$5.532 \cdot 10^{-15}$	10.152
20	$2.727 \cdot 10^{-4}$	21.218
30	$2.605 \cdot 10^{-2}$	34.105
90	$6.667 \cdot 10^{-1}$	$1.527 \cdot 10^2$

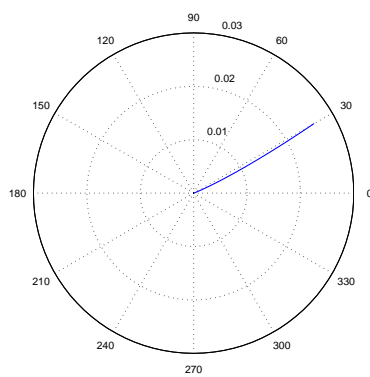
TAB. 2 – Les valeurs de $r(\theta)$ et de $\alpha(\theta)$ (en degré) pour $\theta \in \{1, 5, 10, 20, 30, 90\}$ (en degré).

Les résultats de (12) sont corroborés par les valeurs données dans le tableau 2.

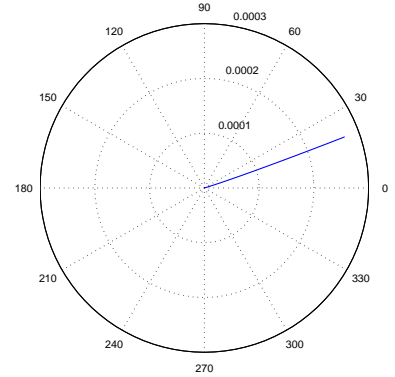
¹Attention à ces notations trompeuses et dangeureuses !



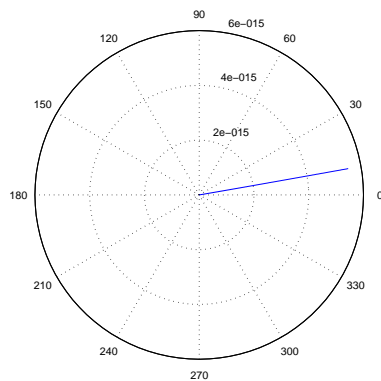
(a) La courbe définie en polaire pour $\theta \in [0, 90^\circ]$.



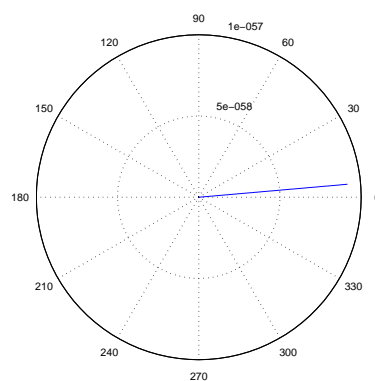
(b) La courbe définie en polaire pour $\theta \in [0, 30^\circ]$.



(c) La courbe définie en polaire pour $\theta \in [0, 20^\circ]$.



(d) La courbe définie en polaire pour $\theta \in [0, 10^\circ]$.



(e) La courbe définie en polaire pour $\theta \in [0, 5^\circ]$.

FIG. 2 – La courbe \mathcal{C} autour de l'origine.

Autrement dit, le point M se confond avec l'origine et l'angle α vaut θ , valeur «petite mais non nulle» : le vecteur tangent semble avoir une pente égale à θ . Cela est confirmé par les figures 2.

On ne peut «descendre» en deçà de $\theta = 1^\circ$, puisque $r(\theta)$ est numériquement nul et la représentation graphique impossible.

5. (a) On vérifie que

$$\lim_{\theta \rightarrow +\infty} r(\theta) = 1^- . \quad (13)$$

Ainsi, le cercle de centre l'origine et de rayon un est asymptote à la courbe.

- (b) La fonction r est croissante ; ainsi, si θ est supérieur à Θ , alors $r(\theta)$ est supérieur à e^{-1/Θ^2} , c'est-à-dire

$$\forall \theta \geq \Theta, \quad 1 - \varepsilon \leq r(\theta).$$

De plus, grâce à (13) et à la croissance de r sur \mathbb{R}_+ , on a

$$\forall \theta \geq \Theta, \quad 1 - \varepsilon \leq r(\theta) < 1. \quad (14)$$

Pour $\Theta = 2\pi$, on a $\varepsilon \approx 2,501 \cdot 10^{-2}$. L'inégalité (14) signifie que distance entre la courbe et le cercle asymptote est inférieure à ε , ce que confirment les figures 1(a) et 1(b).

Annexe A. Un exemple d'une fonction de classe C^∞ dont toutes les dérivées sont nulles en un point.

Soit la fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 0, \\ e^{-1/x^2}, & \text{si } x \neq 0. \end{cases} \quad (15)$$

Cet exemple constitue un exemple classique² de fonction de classe C^∞ dont toutes les dérivées sont nulles en un point.

Il est clair que f est continue en zéro. Puisque f est paire, on l'étudie sur \mathbb{R}_+ . La fonction f est de classe C^∞ sur \mathbb{R}_+^* et continue en zéro. Étudions-la maintenant en zéro.

Lemme 4. *La fonction f est C^∞ en zéro et toutes ses dérivées y sont nulles.*

Définition 5. Pour tout entier p non nul, on note $\mathcal{P}(p)$ la propriété constituée des quatre assertions suivantes :

$$f \text{ est } p \text{ fois dérivable en zéro ;} \quad (16a)$$

$$f^{(p)}(0) = 0 ; \quad (16b)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} f^{(p)}(x) = 0 ; \quad (16c)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f^{(p)}(x) = R_p(x) e^{-1/x^2}, \quad (16d)$$

R_p étant une fraction rationnelle de la forme

$$R_p(x) = \frac{1}{x^{n_p}} q_p(x), \quad (16e)$$

où n_p est un entier et q_p un polynôme.

En utilisant les notations précédentes, démontrons maintenant le lemme suivant :

Lemme 6. *Pour tout entier n non nul, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie.*

Démonstration. Soit p non nul fixé. Démontrons par récurrence sur $j \in \{1, \dots, p\}$ que $\mathcal{P}(j)$ est vraie.

- Pour $j = 1$, il suffit d'appliquer le lemme 1 à f : on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}, \quad (17)$$

ce qui est bien de la forme (16d). Puisque «l'exponentielle l'emporte sur toutes les puissances de x », la limite de f' en zéro est nulle. D'après le lemme 1, f est dérivable en zéro, $f'(0)$ est nulle et f' est continue en zéro. Ainsi $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

²Parfois, notamment pour les distributions, on considère aussi la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0, \\ e^{-1/x^2}, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

- Soit j dans $\{1, \dots, p-1\}$ fixé. Supposons maintenant que $\mathcal{P}(j)$ vraie et démontrons que $\mathcal{P}(j+1)$ est vraie.

D'après l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(j)$, f est de classe C^j sur \mathbb{R} et

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f^{(j)}(x) = \frac{1}{x^{n_j}} q_j(x) e^{-1/x^2},$$

et par dérivation, pour x non nul,

$$f^{(j+1)}(x) = \left(\frac{2}{x^3} \frac{1}{x^{n_j}} q_j(x) + \left(\frac{1}{x^{n_j}} q_j(x) \right)' \right) e^{-1/x^2}.$$

Après calculs, on a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f^{(j+1)}(x) = \frac{1}{x^{Q+1}} \left(2x^{Q-n_j-2} + x^{Q-n_j^2} (q'_j(x)x^{n_j+1} - n_j x^{n_j}) \right) e^{-1/x^2}, \quad (18)$$

où $Q = \max(n_j + 3, n_j^2)$. Cela est bien la forme annoncée par (16d) pour $n = j+1$. On pose $g = f^{(j)}$, continue sur \mathbb{R} ; d'après (18), on a

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} g'(x) = 0.$$

Ainsi, d'après le lemme (1), g est dérivable en zéro, $g'(0) = 0$ et la dérivée de g est continue en zéro; ainsi $\mathcal{P}(j+1)$ est vraie. □

Preuve du lemme 4. Il suffit d'appliquer le lemme 6. □

Annexe B. Quelques remarques sur le point stationnaire d'une courbe en polaire

On étudie une courbe \mathcal{C} définie en polaire par r localement autour de θ_0 .

Si $r(\theta_0) \neq 0$, on connaît donc, grâce à (2), la direction de la tangente à la courbe dans le repère local $(\vec{u}_\theta, \vec{u}'_\theta)$. Si $r(\theta_0) = 0$ et $r'(\theta_0) = 0$, nous sommes en présence du point stationnaire $M_0 = O$.

En fait, on a un résultat plus précis, et ce, quel que soit la valeur de $r'(\theta_0)$ (et même si r n'est pas dérivable en θ_0).

Lemme 7. *On suppose que r est continue en θ , de signe constant et non nulle sur chaque intervalle $]\theta_0, \theta_0 + \delta]$ et $[\theta_0 - \delta, \theta_0[$ (pour $\delta > 0$). Alors, la tangente à la courbe en θ_0 est portée par \vec{u}_{θ_0} .*

De plus, si r ne change pas de signe au voisinage de θ_0 , alors O est un point de rebroussement de première espèce; si r change de signe au voisinage de θ_0 , alors O un point ordinaire (la courbe traverse la tangente).

Démonstration. Si r est continue en θ_0 , alors

$$\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \overrightarrow{OM}(\theta) = \vec{0},$$

et la tangente $\vec{w}(\theta_0)$ à la courbe peut être définie comme la limite de la corde $\overrightarrow{OM}(\theta)$:

$$\vec{w}(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \frac{\overrightarrow{OM}(\theta)}{\|\overrightarrow{OM}(\theta)\|}.$$

On a

$$\overrightarrow{OM}(\theta) = r(\theta) \vec{u}_\theta.$$

Ainsi, on a, en notant ε_+ le signe de r sur $]\theta_0, \theta_0 + \delta]$ et ε_- le signe de r sur $[\theta_0 - \delta, \theta_0[$,

$$\forall \theta \in]\theta_0, \theta_0 + \delta], \quad \frac{\overrightarrow{OM}(\theta)}{\|\overrightarrow{OM}(\theta)\|} = \varepsilon_+ \vec{u}_\theta, \quad (19a)$$

$$\forall \theta \in [\theta_0 - \delta, \theta_0[, \quad \frac{\overrightarrow{OM}(\theta)}{\|\overrightarrow{OM}(\theta)\|} = \varepsilon_- \vec{u}_\theta. \quad (19b)$$

On en déduit que

$$\lim_{\substack{\theta \rightarrow \theta_0 \\ \theta > \theta_0}} \frac{\overrightarrow{OM}(\theta)}{\|\overrightarrow{OM}(\theta)\|} = \varepsilon_+ \vec{u}_{\theta_0},$$

$$\lim_{\substack{\theta \rightarrow \theta_0 \\ \theta < \theta_0}} \frac{\overrightarrow{OM}(\theta)}{\|\overrightarrow{OM}(\theta)\|} = \varepsilon_- \vec{u}_{\theta_0},$$

ce qui permet de conclure.

Un raisonnement géométrique simple permet de démontrer la seconde partie du lemme. \square

Remarque 8. Il est intéressant de constater que la tangente à la courbe existe, même si la fonction r n'est pas dérivable en θ_0 !

Parfois, on donne le résultat suivant :

Lemme 9. Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2. On suppose que la fonction r est p fois dérivable en θ_0 et que

$$\forall i \in \{0, \dots, p-1\}, \quad r^{(i)}(\theta_0) = 0, \quad (20)$$

$$r^{(p)}(\theta_0) \neq 0. \quad (21)$$

Alors, la tangente à la courbe en θ_0 est portée par \vec{u}_{θ_0} .

De plus, si p est pair, alors O est un point de rebroussement de première espèce ; si p est impair, alors O un point ordinaire (la courbe traverse la tangente).

Démonstration. Le raisonnement consiste à montrer par récurrence sur $k \geq 1$ que

$$\vec{F}^{(k)}(\theta_0) = r^{(k)}(\theta_0) \vec{u}_\theta + \vec{v}(\theta_0), \quad (22)$$

où $\vec{v}(\theta_0)$ est une combinaison linéaire de \vec{u}_{θ_0} et de \vec{u}'_{θ_0} , chacun des coefficients de $\vec{v}(\theta_0)$ sur \vec{u}_{θ_0} et sur \vec{u}'_{θ_0} étant lui même une combinaison linéaire des dérivées de r en θ_0 d'ordre strictement inférieur à k . On applique naturellement (22) à $k = p$, ce qui donne, compte tenu de (20)-(21) :

$$\vec{F}^{(p)}(\theta_0) = r^{(p)}(\theta_0) \vec{u}_\theta, \quad (23)$$

ce qui permet de conclure.

Un raisonnement géométrique simple permet de démontrer la seconde partie du lemme.

Un autre façon de procéder est de remarquer que ce lemme est un cas particulier du lemme 7. \square

Remarque 10. Le lemme 7 permet d'étudier des points stationnaires dans un cadre un peu plus général que la situation plus usuelle du lemme 9, souvent étudiée en cours. Nous donnons en annexe A l'exemple d'une fonction de classe C^∞ dont toutes les dérivées sont nulles en un point. Le lemme 9 ne sera donc pas utilisable alors que nous verrons que le lemme 7 le sera.