MT25 Printemps 2006

Examen de TD du 01 juin 2006

Durée : 1,5 heure(s)

Exercice 1. Soient a et m deux nombre strictement positifs et la courbe Γ d'équation polaire :

$$r(\theta) = ae^{m\theta}.$$

(1) Calculer en tout point une abscisse curviligne, le repère de Frenet et le rayon de courbure.

(2) Calculer la longueur de Γ pour $\theta \in [0, 2\pi]$.

(3) Montrer que l'angle $V(\theta)$ entre la droite $\mathbb{R}\vec{u}_\theta$ et la tangente $T(\theta)$ à la courbe est constant et que le centre de courbure I en $M(\theta)$ est tel que les droites (OI) et (IM) sont perpendiculaires.

(4) Tracer la courbe pour $a = 1$ et $m = 1/\sqrt{3}$ ainsi que sa développée.

(5) Déterminer une équation polaire de la développée de Γ et montrer que c'est une spirale logarithmique.

(6) Réciproquement, on cherche les courbes $\mathcal{C}$ telles que l'angle $V(\theta)$ soit constant égal à α.

(a) Si α est un multiple de π, montrer que $\mathcal{C}$ est incluse dans une droite passant par l'origine.

(b) Si α est un multiple impair de $\pi/2$, montrer que $\mathcal{C}$ est incluse dans un cercle de centre l'origine.

(c) Sinon, montrer qu'une équation polaire de $\mathcal{C}$ vérifie une équation différentielle d'ordre 1 que l'on intégrera ; en déduire que $\mathcal{C}$ est une spirale logarithmique.

Exercice 2. Soit la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (\sin x)(\sin y)(\sin(x + y)).$$

(1) Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x + \pi, y) = f(x, y + \pi) = f(x, y),$$

et que

$$f(-x, -y) = -f(x, y).$$

(2) En déduire que la recherche des extremums relatifs de f peut être limitée à $[0, \pi/2]\times[-\pi/2, \pi/2]$.

(3) Déterminer les extremums relatifs de f sur $[0, \pi/2] \times [-\pi/2, \pi/2]$.

(4) En déduire les extremums relatifs de f sur $\mathbb{R}^2$.