

Examen médian du 28 avril 2006

Durée : 2 heure(s)

On rendra une copie (au moins et même blanche) pour chacun des deux exercices.

Une feuille A4 recto de rappels de cours et une calculatrice autorisées.

On pourra admettre chaque résultat et passer à la suite.

Exercice 1 (Cycloïde). Soient a et λ deux réels strictement positifs.

On considère un cercle de centre Ω , de rayon a se déplaçant «sans glisser». Soit un point M fixe de ce cercle et un point N défini par

$$\overrightarrow{\Omega N} = \lambda \overrightarrow{\Omega M}. \quad (1)$$

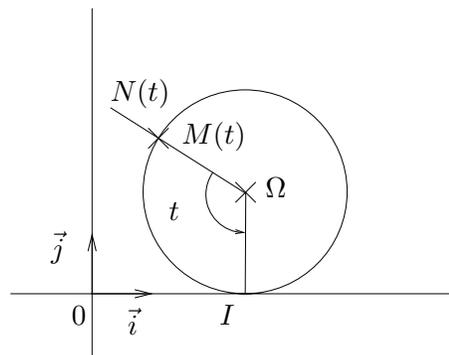


FIG. 1. Le cercle définissant la cycloïde et les points M et N .

Initialement, à $t = 0$, le point Ω a pour coordonnées $(0, a)$ et M est l'origine. Puis, pour tout $t \geq 0$, le cercle s'est déplacé vers la droite de telle sorte que

$$t = \left(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega I}} \right), \quad (2)$$

où I est le point de contact entre le cercle et l'axe des x . Voir figure 1.

- (1) Montrer en écrivant l'égalité de la longueur de l'arc de cercle IM et la distance OI , que les coordonnées $(x_\lambda(t), y_\lambda(t))$ de N vérifient

$$x_\lambda(t) = a(t - \lambda \sin t), \quad (3a)$$

$$y_\lambda(t) = a(1 - \lambda \cos t). \quad (3b)$$

- (2) On s'intéresse à la courbe décrite par $N(t)$ quand t décrit \mathbb{R} .

(a) Montrer que l'on peut se réduire à l'intervalle $[0, \pi]$.

(b) Calculer les dérivées de x_λ et de y_λ .

(c) (i) On suppose tout d'abord que $\lambda \in]0, 1[$. Dresser le tableau de variation de x_λ et y_λ .

(ii) On suppose maintenant que $\lambda \in]1, +\infty[$. On introduit l'unique réel $\theta_0 \in]0, 1[$ tel que

$$\cos \theta_0 = \frac{1}{\lambda}. \quad (4)$$

Montrer que l'on a

$$x'_\lambda(t) = 2a\lambda \sin\left(\frac{t - \theta_0}{2}\right) \sin\left(\frac{t + \theta_0}{2}\right), \quad (5)$$

et en déduire le tableau de variation de x_λ et y_λ .

(iii) On suppose enfin que $\lambda = 1$. Dresser sommairement le tableau de variation de x_λ et y_λ .

(d) (i) Tracer soigneusement les trois courbes F_λ pour $t \in [-\pi, 3\pi]$ pour les valeurs suivantes

$$a = 1, \quad \lambda \in \left\{1, \frac{13}{10}, \frac{7}{10}\right\}. \quad (6)$$

(ii) Que remarquez-vous dans le cas où $\lambda = \frac{13}{10}$?

- (3) On se replace dans le cas a quelconque et $\lambda > 1$.

(a) Montrer que

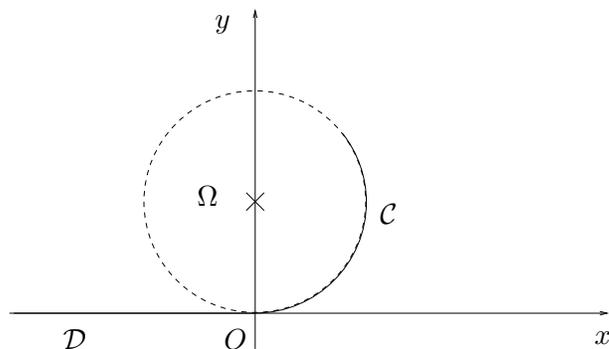
$$\forall t \in]0, \theta_0[, \quad x'_\lambda(t) < 0 \text{ et } y_\lambda(t) < 0, \quad (7a)$$

$$\forall t \in]\theta_0, \pi/2[, \quad x'_\lambda(t) > 0 \text{ et } y_\lambda(t) > 0. \quad (7b)$$

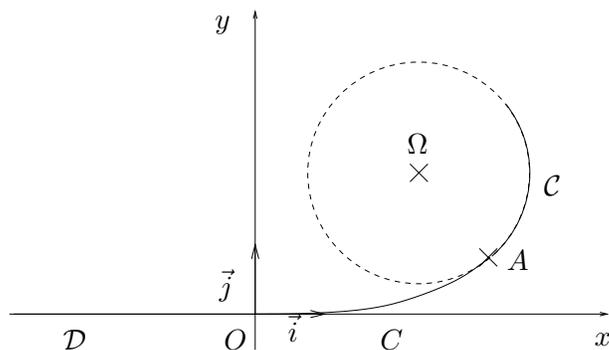
(b) Quelle est la valeur maximale de $|x'_\lambda|$ sur $[0, \theta_0]$?

- (4) En imaginant un système mécanique (existant !) qui se trouve dans la configuration de la figure 1 page précédente, quelle conséquences (étranges !) peut-on tirer des résultats de la question 3 ?

Dans ce même système mécanique, existe-t-il d'autres points qui possèdent cette étrange propriété ?



(a) : Une trajectoire formée d'un segment de droite \mathcal{D} et d'un arc de cercle \mathcal{C} .



(b) : Une trajectoire formée d'un segment de droite \mathcal{D} , d'un arc de courbe C et d'un arc de cercle \mathcal{C} .

FIG. 2. Deux types de trajectoires.

Exercice 2 (Clothoïde).

On considère un point matériel $M(t)$ évoluant dans le plan, paramétré par le temps

$$F(t) = (x(t), y(t)). \quad (8)$$

(1) Justifier sommairement les formules suivantes :

$$\vec{v} = v\vec{T}, \quad (9a)$$

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad (9b)$$

$$\vec{\gamma} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{v^2}{R}\vec{N}, \quad (9c)$$

où s est l'abscisse curviligne, \vec{v} et $\vec{\gamma}$ désignent la vitesse et l'accélération et $(M(t), \vec{T}, \vec{N})$ est le repère de Frenet au point $M(t)$.

(2) On suppose pour toute la suite que la vitesse scalaire v est constante. On suppose que la trajectoire étudiée est celle du centre de gravité d'une véhicule (voiture ou un train, par exemple) en mouvement et l'on s'intéresse à un point matériel immobile dans cette voiture.

(a) Supposons que le véhicule étudié, roulant à vitesse constante, décrive la trajectoire de la figure 2(a), formée d'un segment de droite \mathcal{D} et d'un arc de cercle \mathcal{C} , de centre Ω .

Que peut-on dire de l'accélération subie par le point $M(t)$ au passage en O ?

(b) On admet de plus que :

- si le véhicule est une voiture, l'angle de braquage des roues avant (et donc du volant) est proportionnel à la courbure $c = 1/R$ de la courbe ;
- un passager, proche du centre de gravité de la voiture et immobile dans cette voiture, subira une accélération proportionnelle à $\vec{\gamma}$.

Dans ce cas, quels sont les inconvénients de la trajectoire de la figure 2(a) page précédente ?

(3) Pour palier cet inconvénient, on intercale maintenant une courbe C entre le segment de droite \mathcal{D} et l'arc de cercle \mathcal{C} , comme l'indique la figure 2(b) page précédente.

L'origine O coïncide avec la fin de la partie linéaire, le point A coïncide avec le début de la partie circulaire.

On cherche une courbe C continue en O et A , dont le vecteur \vec{T} soit continu en O et A et dont la courbure c soit continue en O et A .

(a) Que valent les courbures en O et en A ?

(b) On paramètre la courbe inconnue C par son abscisse curviligne s , prise nulle en O . On cherche alors une courbe C dont la courbure c soit proportionnelle à l'abscisse curviligne s , c'est-à-dire, il existe une constante, notée $2/k^2$ où $k > 0$ telle qu'en tout de point C , on ait

$$c(s) = \frac{2}{k^2}s. \quad (10)$$

Montrer alors que les inconvénients constatés en question 2b disparaissent !

(c) Comme dans le cours, on introduit l'angle entre le vecteur \vec{i} et le vecteur unitaire tangent \vec{T} :

$$\phi = \left(\vec{i}, \vec{T} \right) \quad [2\pi]. \quad (11)$$

Soit s_A l'abscisse curviligne du point A . Montrer que pour la courbe C :

$$\phi(0) = 0, \quad (12a)$$

$$\forall s \in [0, s_A], \quad \phi(s) = \frac{s^2}{k^2}. \quad (12b)$$

(d) Montrer alors que

$$\forall s \in [0, s_A], \quad x(s) = \int_0^s \cos\left(\frac{u^2}{k^2}\right) du = k \int_0^{s/k} \cos(w^2) dw, \quad (13a)$$

$$y(s) = \int_0^s \sin\left(\frac{u^2}{k^2}\right) du = k \int_0^{s/k} \sin(w^2) dw. \quad (13b)$$

et calculer le vecteur \vec{T} en fonction de s et de k .

(e) Vérifier que le paramétrage est normal.

(f) **question facultative**

Réciproquement, si x et y sont définis par (13), montrer que (10) a bien lieu, que la tangente à la courbe en l'origine est horizontale et que la courbure est nulle en l'origine.

- (4) (a) Si l'on veut que la courbe C «raccorde» le cercle \mathcal{C} , que doit-on imposer en A ?
 (b) Conclure sur la courbe C , appelée clothoïde.
 (c) Montrer que l'ensemble de la trajectoire (formée du segment de droite \mathcal{D} , de l'arc de courbe C et de l'arc de cercle \mathcal{C}) est de classe C^2 . Est-elle de classe C^3 ?
- (5) On donne quelques valeurs numériques des fonctions définies par

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad f_x(s) = \int_0^s \cos(w^2) dw, \quad (14a)$$

$$f_y(s) = \int_0^s \sin(w^2) dw, \quad (14b)$$

dans le tableau 1.

s	$f_x(s)$	$f_y(s)$
0	0	0
0.11111	1.11109×10^{-1}	4.57242×10^{-4}
0.22222	2.22168×10^{-1}	3.65734×10^{-3}
0.33333	3.32922×10^{-1}	1.23347×10^{-2}
0.44444	4.42713×10^{-1}	2.91823×10^{-2}
0.55555	5.50286×10^{-1}	5.67681×10^{-2}
0.66666	6.53617×10^{-1}	9.73806×10^{-2}
0.77777	7.49793×10^{-1}	1.52783×10^{-1}
0.88888	8.34976×10^{-1}	2.23876×10^{-1}
1	9.04524×10^{-1}	3.10268×10^{-1}

TAB. 1. Quelques valeurs de f_x et de f_y .

Tracer la courbe pour $k = 1$. On tracera pour plusieurs valeurs de s , sur la même figure :

- le point $M(s) = (x(s), y(s))$;
- le vecteur \vec{T} ;
- le cercle osculateur ;

On tracera aussi le cercle \mathcal{C} .

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur <http://utbmjb.chez-alice.fr/>