MT25 Printemps 2006

# Corrigé de l'examen médian du 28 avril 2006

**Correction de l'exercice 1.**
On renvoie à l'exercice 3.1 du TD 3 et à sa correction qui traite partiellement cet exercice (dans le cas où $\lambda = 1$).

(1) Comme dans l'exercice 3.1 du TD 3, on montre que l'on a

$$\overrightarrow{\Omega M} = -a\left(\sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j}\right). \tag{1}$$

D'autre part, on a aussi

$$MI = at = OI = x_\Omega.$$

Ainsi, il vient, puisque $\overrightarrow{\Omega N} = \lambda\overrightarrow{\Omega M}$,

$$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega N} = at\vec{i} + a\vec{j} + \lambda\overrightarrow{\Omega M} = at\vec{i} + a\vec{j} - a\lambda\left(\sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j}\right),$$

et donc, on obtient les coordonnées de $N$ :

$$\boxed{x_\lambda(t) = a(t - \lambda\sin t)}, \tag{2a}$$

$$\boxed{y_\lambda(t) = a(1 - \lambda\cos t)}. \tag{2b}$$

(2) Pour toute la suite, on pose

$$\forall\lambda > 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad F_\lambda(t) = \big(a(t - \lambda\sin t), a(1 - \lambda\cos t)\big). \tag{3}$$

(a) Remarquons que, pour tout $t$, on a

$$F_\lambda(t + 2\pi) = \big(a(t - \lambda\sin t), a(1 - \lambda\cos t)\big) + 2\pi a\vec{i} = F_\lambda(t) + 2\pi a\vec{i}.$$

On peut donc étudier la courbe sur $[0, 2\pi]$ ; on aura la totalité de la courbe en faisant des translations de vecteur $2\pi ak\vec{i}$, pour $k \in \mathbb{Z}$.
D'autre part, si $t \in [0, \pi]$, alors $2\pi - t \in [\pi, 2\pi]$ et

$$\frac{1}{2}\left(x_\lambda(2\pi - t) + x_\lambda(t)\right) = \pi a,$$
$$y_\lambda(2\pi - t) = y_\lambda(t),$$

et on peut donc se restreindre à l'intervalle $[0, \pi]$ en faisant une symétrie par rapport à la droite d'équation $x = \pi a$.

(b) Il est clair que

$$\boxed{x'_\lambda(t) = a(1 - \lambda\cos t)}, \tag{4a}$$

$$\boxed{y'_\lambda(t) = a\lambda\sin t}. \tag{4b}$$

(c) (i) On suppose tout d'abord que $\lambda \in ]0,1[$. Ainsi, $x'_\lambda(t) = a\lambda(1/\lambda - \cos t) > 0$. On constate que sur $[0,\pi]$, sin est positif. On en déduit le tableau de variation de $x_\lambda$ et $y_\lambda$ :

| $t$ | $0$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|
| $x'_\lambda$ | $> 0$ | $+$ | $> 0$ |
| $y'_\lambda$ | $0$ | $+$ | $0$ |
| $x_\lambda$ | $0$ | $\nearrow$ | $a\pi$ |
| $y_\lambda$ | $a(1-\lambda)$ | $\nearrow$ | $a(1+\lambda)$ |

(ii) On suppose maintenant que $\lambda \in ]1,+\infty[$. On introduit l'unique réel $\theta_0 \in ]0,1[$ tel que

$$\cos\theta_0 = \frac{1}{\lambda}. \tag{5}$$

D'après (4a), il vient, en factorisant

$$\begin{aligned} x'_\lambda(t) &= a(1-\lambda\cos t), \\ &= a\lambda\left(\cos\theta_0 - \cos t\right), \\ &= -2a\lambda\sin\left(\frac{\theta_0 - t}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta_0 + t}{2}\right), \end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{x'_\lambda(t) = 2a\lambda\sin\left(\frac{t-\theta_0}{2}\right)\sin\left(\frac{t+\theta_0}{2}\right)} \tag{6}$$

On en déduit le tableau de variation de $x_\lambda$ et $y_\lambda$ :

| $t$ | $0$ | | $\theta_0$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x'_\lambda$ | $< 0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $> 0$ |
| $y'_\lambda$ | $0$ | $+$ | $> 0$ | $+$ | $0$ |
| $x_\lambda$ | $0$ | $\searrow$ | $a(\theta_0 - \tan(\theta_0))$ | $\nearrow$ | $a\pi$ |
| $y_\lambda$ | $a(1-\lambda)$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $a(1+\lambda)$ |

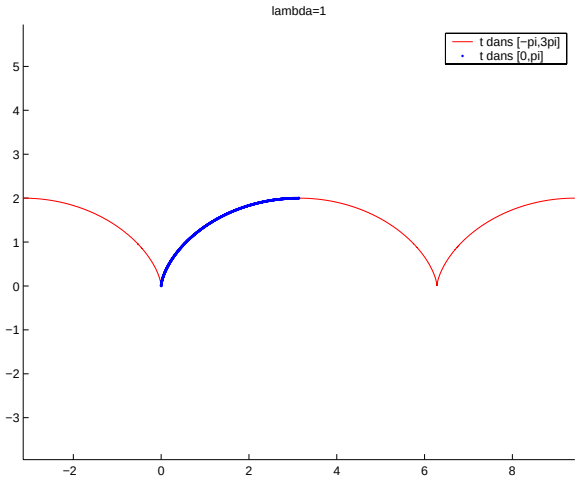
On vérifie que $x(\theta_0) = a(\theta_0 - \tan(\theta_0)) < 0$ et que $y(\theta_0) = 0$.

(iii) On suppose enfin que $\lambda = 1$.

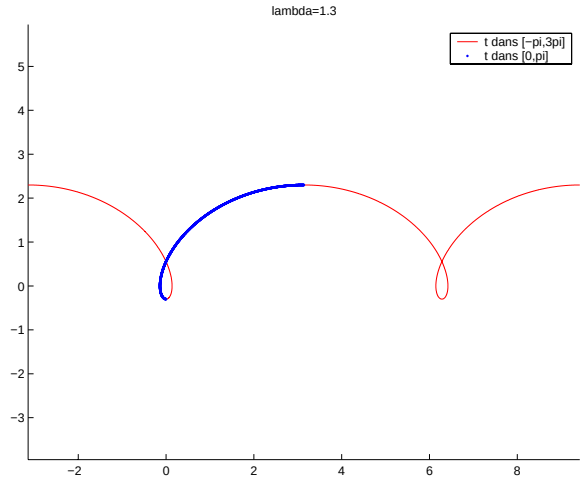
Le tableau de variation de $x_\lambda$ et $y_\lambda$ peut s'obtenir grâce aux résultats des questions 2(c)i ou 2(c)ii en faisant tendre $\lambda$ vers 1. On peut aussi utiliser les résultats de l'exercice l'exercice 3.1 du TD 3.

On obtient

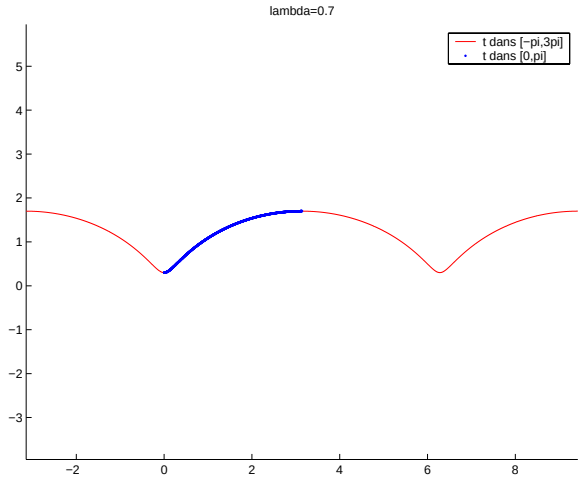
| $t$ | $0$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|
| $x'_\lambda$ | $0$ | $+$ | $> 0$ |
| $y'_\lambda$ | $0$ | $+$ | $0$ |
| $x_\lambda$ | $0$ | $\nearrow$ | $a\pi$ |
| $y_\lambda$ | $0$ | $\nearrow$ | $2a$ |




(a) : $\lambda = 1$




(b) : $\lambda = 13/10$




(c) : $\lambda = 7/10$

FIG. 1. La courbe $F_\lambda$ pour $a = 1$ pour $t \in [-\pi, 3\pi]$.

(d) (i)
- Pour $a = 1$ et $\lambda = 1$, on utilise l'étude de la question2(c)iii. On pourra aussi consulter la correction de l'exercice 3.1 du TD 3.
- Pour $a = 1$ et $\lambda = 13/10$, on utilise l'étude de la question2(c)ii.
- Pour $a = 1$ et $\lambda = 7/10$, on utilise l'étude de la question2(c)i.

Dans tous les cas, on exploite aussi les symétries et périodicités montrées en question 2a.

Voir les figures 1 obtenues par matlab (script `cormedianP06_exo1.m`).

*Remarque* 1. On pourra consulter l'encyclopédie wiki à l'adresse `http://fr.wikipedia.org/wiki/Cyclo%C3%AFde` pour les cycloïdes.

(ii) Dans le cas où $\lambda = \frac{13}{10}$, on remarque sur la courbe obtenue des petites boucles et des grandes boucles. Dans les autres cas, seules les grandes boucles sont présentes. Dans

le cas limite $\lambda = 1$, la petite boucle disparaît et une tangente verticale apparaît (seul point stationnaire), qui n'apparaît pas dans le cas où $\lambda \neq 1$.

(3) On se replace dans le cas $a$ quelconque et $\lambda > 1$.

(a) D'après le tableau de variation de la question 2(c)ii, il est immédiat que

$$\forall t \in ]0, \theta_0[, \quad x'_\lambda(t) < 0 \text{ et } y_\lambda(t) < 0, \tag{7a}$$

$$\forall t \in ]\theta_0, \pi/2], \quad x'_\lambda(t) > 0 \text{ et } y_\lambda(t) > 0. \tag{7b}$$

(b) D'après les calculs de la question 2(c)ii, il vient

$$x''_\lambda(t) = a\lambda \sin t,$$

de signe positif sur $[0, \theta_0]$. Ainsi, puisque $x'_\lambda(\theta_0) = 0$ et que

$$x'_\lambda(0) = -2a\lambda \sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right),$$

on en déduit que $x'_\lambda$ est croissante que $[0, \theta_0]$ et que

$$\boxed{\text{La valeur maximale de } |x'_\lambda| \text{ sur } [0, \theta_0] \text{ est égale à } 2a\lambda \sin^2(\theta_0/2).} \tag{8}$$

(4) On considère une roue qui roule sur un sol sans glisser (ce qui n'a rien d'exceptionnel !). Pour obtenir un point $N$ qui vérifie

$$\overrightarrow{\Omega N} = \lambda \overrightarrow{\Omega M}, \tag{9}$$

avec $\lambda > 1$ avec $M$ un point fixe de ce cercle, il est nécessaire que le point $N$ soit à l'extérieur de ce cercle, ce qui semble empêcher la rotation du système, sauf ... si le point $N$ peut passer sous le sol ! Cela est le cas pour la roue d'un wagon : le cercle de la roue roule sans glisser et il existe un grand cercle, dont le rayon est strictement plus grand, qui empêche le train de dérailler. Un point $N$ de ce grand cercle correspond donc à la configuration (9).

Les résultats (7) traduise le fait qu'il existe des intervalles de temps du type $]-\theta_0, \theta_0[+2k\pi$ où $k$ est un entier relatif quelconque (d'après la symétrie et la périodicité) où la composante horizontale $x'_\lambda(t)$ de la vitesse du point $N$ est négative par rapport au sol tandis que l'ordonnée $y_\lambda(t)$ est négative. Au contraire, pour les autres valeurs de temps, la composante horizontale $x'_\lambda(t)$ de la vitesse du point $N$ est positive par rapport au sol tandis que l'ordonnée $y_\lambda(t)$ est positive. Cela signifie donc que

$$\boxed{\text{Périodiquement, des points d'un train reculent !.}} \tag{10}$$

De façon plus précise

$$\boxed{\text{Ces points d'un train reculent quand ils sont sous le niveau du rail.}} \tag{11}$$

Pour les autres points de la roue (correspondant à $\lambda \leq 1$), cette singularité n'apparaît pas.

On peut imaginer d'autre points qui reculent par rapport au sol, par exemple, un système en rotation très rapide (par exemple dans le moteur) ou alors des gens qui courent très rapidement dans le train en marche arrière !

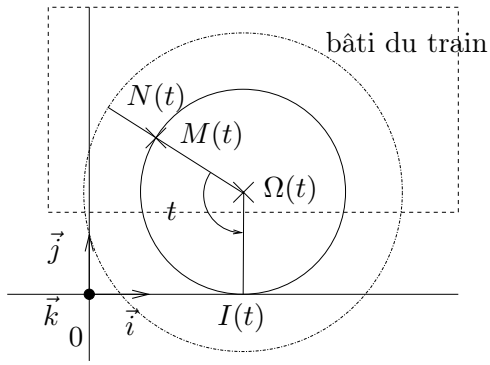



FIG. 2. Un train.

*Remarque* 2. On peut comprendre cette notion en introduisant le vecteur de rotation instantanée.

On considère un train roulant à la vitesse $\vec{v}_\Omega = v_\Omega \vec{i}$ (constante ou non) et une de ses roues, de centre $\Omega$ (voir figure 2). Le point $N(t)$ désigne un des points de la roue extérieure du wagon, de rayon strictement supérieur à $a$. Le bâti du train a un mouvement de translation par rapport au sol, tandis que la roue a un mouvement de rotation par rapport au bâti du train autour du point $\Omega(t)$.

Notons $\vec{\omega}$ (qui peut dépendre du temps) le vecteur de rotation instantané de la roue (par rapport au référentiel lié au train). On rappelle que le champs des vitesses de la roue par rapport au référentiel lié au train est donné par

$$\vec{v}_{\mathrm{t}} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{\Omega P}, \tag{12}$$

où $P$ est le point considéré. La loi des compositions des vitesse donne pour un point quelconque $P$ de la roue, immobile dans le référentiel lié à la roue, sa vitesse par rapport au sol :

$$\vec{v}_{\mathrm{s}} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{\Omega P} + \vec{v}_\Omega. \tag{13}$$

Si $P$ est choisi égal au point coïncidant avec $I$ (c'est à dire que $P$ est lié au référentiel de la roue et est égal à l'instant $t$ au point $I$) de vitesse nulle par rapport au référentiel lié au sol (car il n'y a pas de glissement), alors on a, selon (13) en projettant dans le répère $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

$$v_\Omega = \omega a. \tag{14}$$

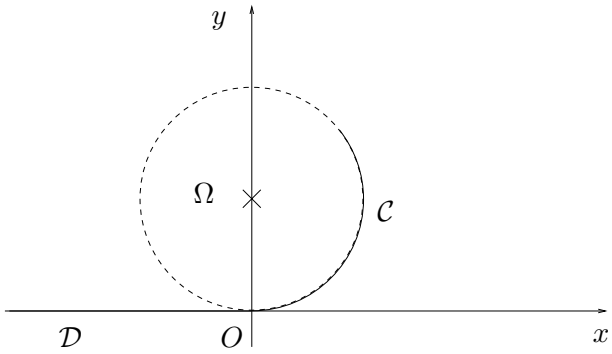
Si on utilise ensuite (13) et (14), on obtient

$$\boxed{\vec{v}_{\mathrm{s}} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{IP},} \tag{15}$$

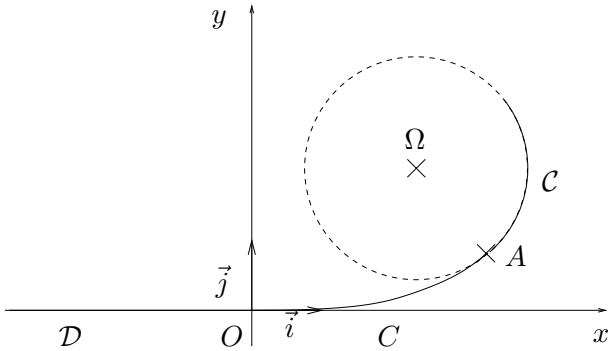
et donc, après projection, puisque $y_I$ est nul, les deux composantes de la vitesses valent

$$\boxed{v_{\mathrm{s},x} = -\omega y_P, \text{ et } v_{\mathrm{s},x} = \omega x_P.} \tag{16}$$

En particulier, si $y_I$ est négatif, la vitesse horizontale est négative ! On retrouve donc le résultat (11) établi plus haut. Pour plus de détails, voir [GS86, Bel88, GAJ94, Bon92].




(a) : Une trajectoire formée d'un segment de droite $\mathcal{D}$ et d'un arc de cercle $\mathcal{C}$.




(b) : Une trajectoire formée d'un segment de droite $\mathcal{D}$, d'un arc de courbe $C$ et d'un arc de cercle $\mathcal{C}$.

FIG. 3. Deux types de trajectoires.

**Correction de l'exercice 2.**
On considère un point matériel $M(t)$ évoluant dans le plan, paramétré par le temps

$$F(t) = \big(x(t), y(t)\big). \tag{17}$$

(1) D'après le chapitre 3 du cours (voir la proposition 3.40 page 48 de la section 3.6), on a les formules suivantes :

$$\boxed{\vec{v} = v\vec{T},} \tag{18a}$$

$$\boxed{v = \frac{ds}{dt},} \tag{18b}$$

$$\boxed{\vec{\gamma} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{v^2}{R}\vec{N},} \tag{18c}$$

où $s$ est l'abscisse curviligne, $\vec{v}$ et $\vec{\gamma}$ désignent la vitesse et l'accélération et $\Big(M(t), \vec{T}, \vec{N}\Big)$ est le repère de Frenet au pont $M(t)$.

(2) On suppose pour toute la suite que la vitesse scalaire $v$ est constante. Ainsi les formules (18) impliquent

$$\boxed{\vec{v} = v\vec{T},} \tag{19a}$$

$$\boxed{\frac{ds}{dt} \text{ est constante},} \tag{19b}$$

$$\boxed{\vec{\gamma} = \frac{v^2}{R}\vec{N},} \tag{19c}$$

(a) Supposons que le véhicule étudié, roulant à vitesse constante, décrive la trajectoire de la figure 3(a) page précédente, formée d'un segment de droite $\mathcal{D}$ et d'un arc de cercle $\mathcal{C}$, de centre $\Omega$.

Au point 0, sur la partie rectiligne, le rayon de courbure $R$ est infini et sur la partie circulaire, il est constant.

La norme de l'accélération en 0 passe donc de la valeur nulle à la valeur non nulle $\frac{v^2}{R}$ ; elle est donc discontinue.

(b) Dans le cas de la trajectoire de la figure 3(a) page précédente, l'angle de braquage passera brusquement de 0 à une valeur non nulle de même que l'accélération subie par le passager. Le conducteur aura donc à tourner subitement son volant tout en subissant une discontinuité d'accélération, ce qui n'est guère confortable ! De même, le chassis et la structure de la voiture seront soulagés de ne plus subir une force discontinue !

(3) Pour palier cet inconvénient, on intercale maintenant une courbe $C$ entre le segment de droite $\mathcal{D}$ et et l'arc de cercle $\mathcal{C}$, comme l'indique la figure 3(b) page précédente.

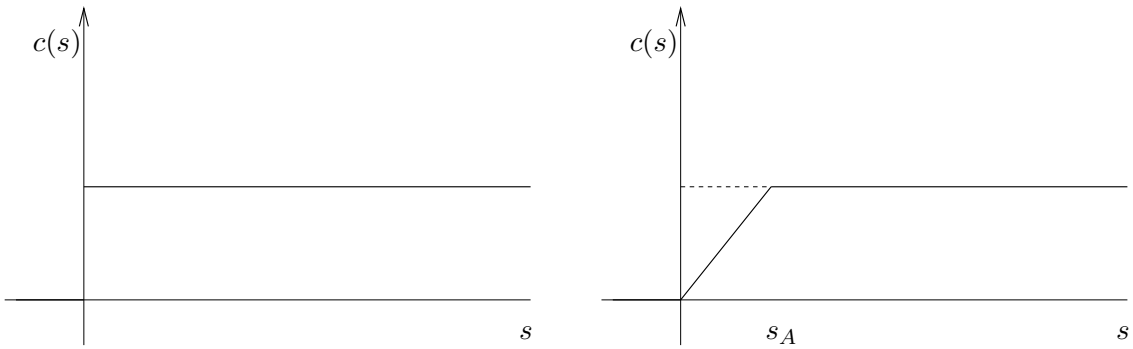
(a) Par continuité, la courbure en $O$ est nulle et en $A$ elle est égale à l'inverse du rayon du cercle $\mathcal{C}$.

(b) On paramètre la courbe inconnue $C$ par son abscisse curviligne $s$, prise nulle en $O$. On cherche alors une courbe $C$ dont la courbure $c$ soit portionnelle à l'abscisse curviligne $s$, c'est-à-dire, il existe une constante, notée $2/k^2$ où $k > 0$ telle qu'en tout de point $C$, on ait

$$c(s) = \frac{2}{k^2}s. \tag{20}$$

Ainsi, dans le cas de la trajectoire de la figure 3(b) page précédente, l'angle de braquage passera continûment, le long de la courbe $C$ de 0 à une valeur non nulle, de même de même que l'accélération subie par le passager. Le conducteur aura donc à tourner progressivement son volant tout en subissant une accélération augmentant continûment, ce qui est beaucoup plus confortable !

*Remarque* 3. Soit $s_A$ l'abscisse curviligne du point $A$. La courbure $c$ le long de la trajectoire 3(a) page précédente est représentée par le graphe de la figure 4(a) page suivante tandis que la courbure $c$ le long de la trajectoire 3(b) page précédente est représentée par le graphe de la figure 4(b) page suivante.




(a) : la courbure $c$ dans le premier cas. (b) : la courbure $c$ dans le second cas.

FIG. 4. la courbure $c$ en fonction de $s$.

(c) Comme dans le cours, on introduit l'angle entre le vecteur $\vec{i}$ et le vecteur unitaire tangent $\vec{T}$ (voir la définition 3.26 page 42)

$$\phi = \left(\widehat{\vec{i}, \vec{T}}\right) \quad [2\pi]. \tag{21}$$

On rappelle que (voir proposition 3.28 page 42)

$$\frac{d\phi}{ds} = c, \tag{22a}$$
$$\frac{dx}{ds} = \cos\phi, \tag{22b}$$
$$\frac{dy}{ds} = \sin\phi. \tag{22c}$$

La tangente en 0 est portée par $\vec{i}$ ; ainsi

$$\boxed{\phi(0) = 0.} \tag{23}$$

D'après (20) et (22a), il vient

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{2s}{k^2}. \tag{24}$$

En intégrant, d'après (23), il vient donc

$$\boxed{\forall s \in [0, s_A], \quad \phi(s) = \frac{s^2}{k^2}.} \tag{25}$$

*Remarque* 4. Il est fondamental de saisir ici que la courbe est paramétrée directement par l'abscisse curviligne $s$.

(d) D'après (22b) et (25) , on a

$$\begin{aligned} x(s) &= \int_0^s \frac{dx}{ds}(u)du + x(0), \\ &= \int_0^s \cos\big(\phi(u)\big)du, \\ &= \int_0^s \cos\left(\frac{u^2}{k^2}\right)du. \end{aligned}$$

On fait de même pour $y$ et en faisant le changement de variable $w = u/k$, on obtient finalement

$$\forall s \in [0, s_A], \quad \boxed{x(s) = \int_0^s \cos\left(\frac{u^2}{k^2}\right)du = k\int_0^{s/k} \cos\left(w^2\right)dw,} \tag{26a}$$

$$\boxed{y(s) = \int_0^s \sin\left(\frac{u^2}{k^2}\right)du = k\int_0^{s/k} \sin\left(w^2\right)dw.} \tag{26b}$$

Naturellement, on obtient aussi le résultat suivant

$$\forall s \in [0, s_A], \quad \boxed{x'(s) = \cos\left(\frac{s^2}{k^2}\right),} \tag{27a}$$

$$\boxed{y'(s) = \sin\left(\frac{s^2}{k^2}\right).} \tag{27b}$$

On vérifie alors qu'on a

$$\boxed{\forall s \in [0, s_A], \quad \sqrt{x'^2(s) + y'^2(s)} = 1.} \tag{28}$$

Puisque $\vec{T} = (x'(t), y'(t))/1$, on a

$$\boxed{\forall s \in [0, s_A], \quad \vec{T} = \left(\cos\left(\frac{s^2}{k^2}\right), \sin\left(\frac{s^2}{k^2}\right)\right).} \tag{29}$$

(e) Le paramétrage est normal selon (28).

(f) Réciproquement, si $x$ et $y$ sont définis par (26), alors (29) a lieu. On en déduit d'une part que

$$\forall s \in [0, s_A], \quad \vec{N} = \left(-\sin\left(\frac{s^2}{k^2}\right), \cos\left(\frac{s^2}{k^2}\right)\right), \tag{30}$$

et d'autre part que

$$\forall s \in [0, s_A], \quad \vec{T}'(s) = \frac{2s}{k^2}\left(-\sin\left(\frac{s^2}{k^2}\right), \cos\left(\frac{s^2}{k^2}\right)\right). \tag{31}$$

D'après la première formule de Frenet (voir proposition 3.25 page 41), on en déduit que $c = 2s/k^2$ et donc que (20) a bien lieu.

On vérifie aisément que la tangente à la courbe en l'origine est horizontale et que la courbure est nulle en l'origine.

*Remarque* 5. En tout point $M(s)$ de la courbe $C$, différent de l'origine, le centre de courbure $I$ est totalement défini par les formules précédente et sa définition

$$\boxed{\forall s \in ]0, s_A], \quad \overrightarrow{MI} = R\vec{N}(s) = \frac{k^2}{2s}\vec{N}(s).} \tag{32}$$

(4) (a) Si l'on veut que la courbe $C$ «raccorde» le cercle $\mathcal{C}$, par continuité de la tangente et de la courbure, le cercle $\mathcal{C}$ est défini par son rayon $R = 1/c = \frac{k^2}{2s_A}$, son centre $I$ est le centre de courbure au point $M(s_A)$ défini par (32).

Ce cercle est le «virage de sortie» de la clothoïde.

(b) La courbe $C$ permet donc de relier un segment de droite à un cercle de façon à avoir une courbure continue et donc tous les avantages signalés en question 3b.

Ainsi, tous les matins, vous empruntez, entre la nationale N19 et la route qui mène à l'UTBM, une ou plusieurs clothoïdes.

Cette courbe appelée aussi spirale de Cornu est donc constament utilisée en construction routière, autoroutière ou ferrovière. Dans ce médian, on l'a utilisé pour «raccorder» un segment à un cercle, mais, avec la même courbe, on peut aussi envisager des raccord cercle-cercle, cercle-droite, ....

L'inconvénient de cette courbe est qu'elle n'est pas connue analytiquement ; quand les ordinateurs n'existaient pas, les mathématiciens en déterminaient quelques points par des calculs manuels !

Pour plus de détails, on pourra consulter les URL suivantes :

- `http://perso.wanadoo.fr/math.15873/Clothoide.html`
- `http://fr.wikipedia.org/wiki/Clotho%C3%AFde`
- `http://www.mathcurve.com/courbes2d/cornu/cornu.shtml`
- `http://www.synapse-informatique.com/topographie.htm`

(c) On a vu dans l'annexe F du cours que la dérivée seconde d'une courbe est liée à sa courbure. Si celle-ci est continue, la dérivée seconde est continue et l'ensemble de la trajectoire (formée du segment de droite $\mathcal{D}$, de l'arc de courbe $C$ et de l'arc de cercle $\mathcal{C}$) est donc de classe $C^2$. Elle n'est pas de classe $C^3$, car la dérivée de $c$ n'est pas continue (voir la figure 4(b) page 8).

(5) On donne quelques valeurs numériques des fonctions définies par

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad f_x(s) = \int_0^s \cos\left(w^2\right) dw, \tag{33a}$$

$$f_y(s) = \int_0^s \sin\left(w^2\right) dw, \tag{33b}$$

dans le tableau 1 page suivante.

D'après (26), on a donc

$$\forall s \in [0, s_A], \quad \boxed{x(s) = k\int_0^{s/k} \cos\left(w^2\right) dw = kf_x\left(\frac{s}{k}\right),} \tag{34a}$$

$$\boxed{x(s) = k\int_0^{s/k} \sin\left(w^2\right) dw = kf_y\left(\frac{s}{k}\right).} \tag{34b}$$

| $s$ | $f_x(s)$ | $f_y(s)$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0.11111 | $1.11109 \times 10^{-1}$ | $4.57242 \times 10^{-4}$ |
| 0.22222 | $2.22168 \times 10^{-1}$ | $3.65734 \times 10^{-3}$ |
| 0.33333 | $3.32922 \times 10^{-1}$ | $1.23347 \times 10^{-2}$ |
| 0.44444 | $4.42713 \times 10^{-1}$ | $2.91823 \times 10^{-2}$ |
| 0.55555 | $5.50286 \times 10^{-1}$ | $5.67681 \times 10^{-2}$ |
| 0.66666 | $6.53617 \times 10^{-1}$ | $9.73806 \times 10^{-2}$ |
| 0.77777 | $7.49793 \times 10^{-1}$ | $1.52783 \times 10^{-1}$ |
| 0.88888 | $8.34976 \times 10^{-1}$ | $2.23876 \times 10^{-1}$ |
| 1 | $9.04524 \times 10^{-1}$ | $3.10268 \times 10^{-1}$ |

TAB. 1. Quelques valeurs de $f_x$ et de $f_y$.

Si $k = 1$, on est donc en mesure

- de déterminer pour les valeurs de $s$ indiquée dans le tableau 1, les coordonnées du point $M(s) = \big(x(s), y(s)\big)$ grâce à (34) ;
- le vecteur $\vec{T}$ en tout point $M(s) = \big(x(s), y(s)\big)$ grâce à (29) ;
- le cercle osculateur pour les valeurs de $s$ indiquée dans le tableau 1, les coordonnées du point $M(s) = \big(x(s), y(s)\big)$ grâce à (30) et (32).

Voir la figure 5, la clothoïde correspondant à $s \in [0, 1]$ et $k = 1$, créée grâce à matlab, ou avec une règle, un stylo et un compas !

On pourra consulter les fonctions et script matlab `affiche_valeur_cossind.m`, `calcul_cossind.m`, `trace_clothoide.m` et `cormedianP06_exo2.m`.

*Remarque* 6. Puisque $s$ décrit $\mathbb{R}_+$, la clothoïde est de longueur infinie ! Cependant, on peut montrer que

$$\int_0^{+\infty} \cos\left(w^2\right) dw = \int_0^{+\infty} \sin\left(w^2\right) dw = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}. \tag{35}$$

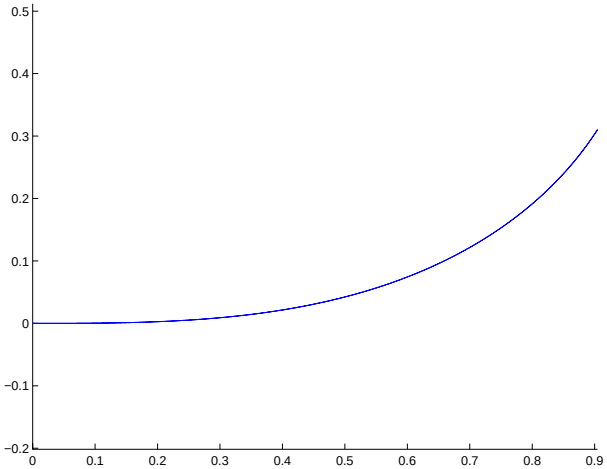
Voir par exemple la wikipédia à `http://fr.wikipedia.org/wiki/Int%C3%A9grale_de_Fresnel`. Grâce à (26), on en déduit que

$$\lim_{s \to +\infty} x(s) = \frac{k}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \tag{36a}$$

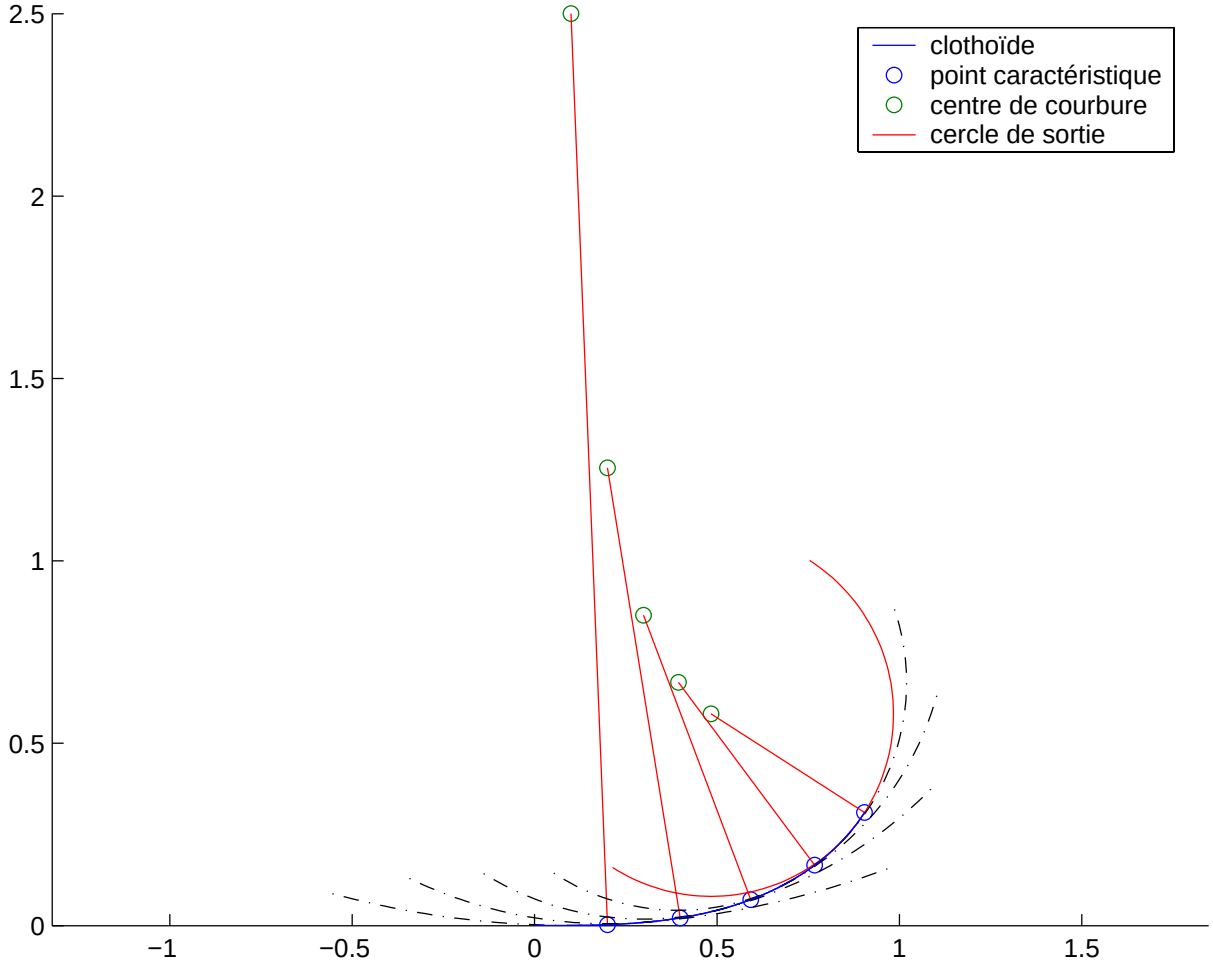
$$\lim_{s \to +\infty} y(s) = \frac{k}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}. \tag{36b}$$

La spirale de Cornu est donc de longueur infinie et a un point assymptote. Puisque le rayon de courbure tend vers zéro, cette courbe «s'enroule de plus en plus autour» de ce point assymptote. Voir la figure 6 page 13 correspondant à $k = 1$ et $s \in [0, 10]$.

*Remarque* 7. La clothoïde est traditionnellement représentée pour $s$ décrivant $\mathbb{R}$, obtenue en prenant la réunion de la courbe de la figure 6 et son symétrique par rapport à l'origine.




(a) La clothoïde seule.




(b) La clothoïde avec quelques cercles de courbure.

FIG. 5. La clothoïde correspondant à $s \in [0, 1]$ et $k = 1$.

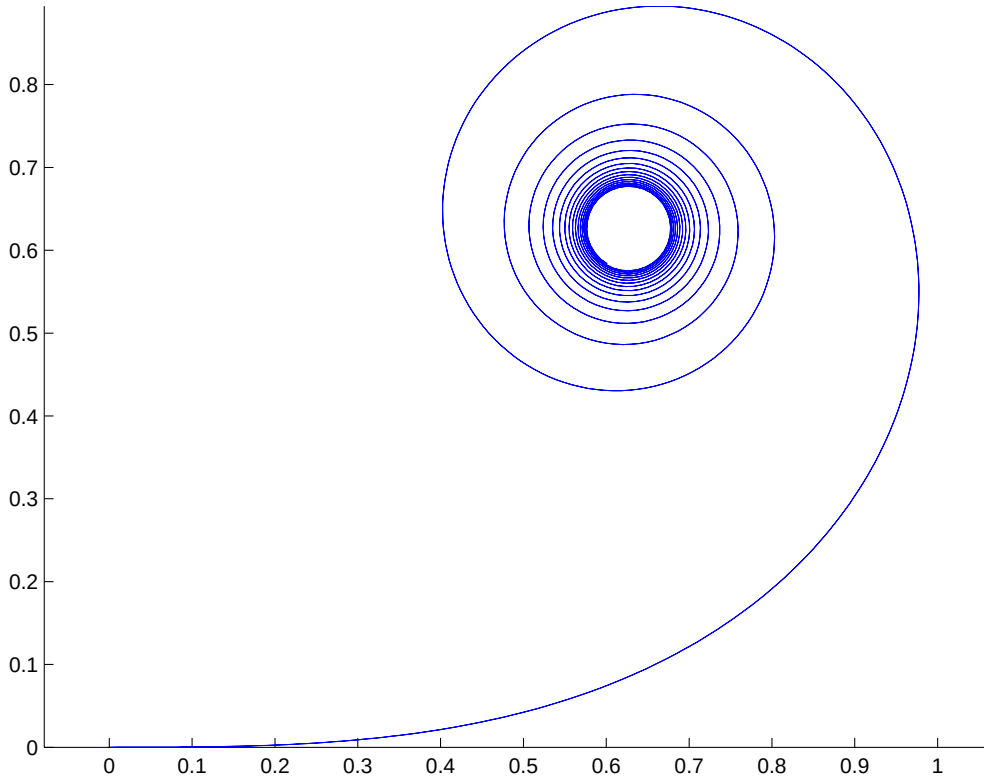



FIG. 6. La clothoïde correspondant à $k = 1$ et $s \in [0, 10]$.

## Références

[Bel88] Didier Bellet. *Cours de mécanique générale*. Cepadues éditions, Toulouse, 1988. disponible à la bibliothèque de l'UTBM, sous la cote QA805 Bel.

[Bon92] M. Bonvalet. *Les principes de la mécanique*. Masson, 1992. disponible à la bibliothèque de l'UTBM, sous la cote QA805 BON.

[GAJ94] Daniel Guinin, François Aubonnet et Bernard Joppin. *Précis de mathématiques, Tome 5 : Géométrie*. Bréal, troisième édition, 1994. disponible à la bibliothèque de l'UTBM, sous la cote QA445 GUI.

[GS86] H. Gié et J.-P. Sarmant. *Mécanique, volume 1*. Technique et documentation (Lavoisier), Paris, 1986.