MT26 TP
séance numéro 3 et 4

UTBM-année 2000/2001
Printemps 2001

MÉTHODE D'ACCÉLÉRATION DE CONVERGENCE DE SÉRIES

1. Objectifs

Le but de ce TP est de calculer numériquement des séries qui convergent «lentement» en en «accélérant» la convergence, c'est-à-dire, en remplaçant la série considérée par une série qui converge vers la même somme, mais avec un reste qui tend vers zéro plus vite.

Dans la section 3, on verra sur une série particulière comment une convergence linéaire peut être remplacée par une convergence quadratique (ces termes seront définis).

Dans la section 4, on étudiera une accélération de convergence d'ordre 4 sur un autre exemple.

Le but de la partie facultative (cf. complément) est de programmer le calcul de polynômes qui permettront d'accélérer automatiquement la convergence de certaines séries.

2. Consignes générales

Chacune des fonctions programmées doit être **commentée** (cf. help) : il faut savoir dans tous les cas :

- ce que fait la fonction ;
- quels sont ses arguments ;
- quelles sont les valeurs sorties.

Ces commentaires sont utiles pour le correcteurs, mais aussi pour vous !

Pour chaque TP, vous disposez de quinze jours (à compter de la dernière séance du TP sur le thème envisagé) pour rendre un rapport écrit (manuscrit ou non et contenant les éventuelles réponses aux différentes questions posées, les algorithmes utilisés, les simulations numériques faites ...) et les sources **commentées** de vos fonctions et scripts, sur disquette ou, de préférence, par mail (voir avec le professeur).

3. Calcul d'une série avec et sans accélération de convergence

3.1. Calcul «lent»

Soit la série (u_n) telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{1}{n^2},$$

dont on sait que la somme est égale à $S = \pi^2/6$.

Question 1

*Programmer une fonction matlab **seriea**(N) qui calcule S_N, la somme partielle de la série à l'ordre N définie par*

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}.$$

On utilisera les spécificités de matlab pour éviter le recours aux boucles et on calculera cette somme en commençant par les plus petits termes (on admet que c'est plus efficace).

Question 2

Calculer S_N, pour $N \in \{10, 100, 1000, 10000, 100000\}$

On cherche maintenant à contrôler l'erreur numérique commise. On considère le reste de la série (u_n) défini par

$$R_N = S - S_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Question 3

Établir la majoration du reste suivante :

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \int_N^{+\infty} \frac{dx}{x^2}. \tag{1}$$

À partir de cette majoration, on constate que si l'on veut évaluer la somme S de la série (u_n) avec une erreur inférieure à un nombre strictement positif donné ε, le nombre N de termes à considérer dans la somme partielle S_N doit vérifier

$$N \geq \frac{1}{\varepsilon}. \tag{2}$$

Question 4

*En déduire une fonction matlab **serieb**(epsilon) qui, pour un réel epsilon strictement positif donné, renvoie la valeur de la somme partielle S_N (N étant défini par (2)) ; de plus, cette fonction retournera le nombre de termes N considérés ainsi que l'erreur exacte commise (c'est-à-dire $\left|S_N - \pi^2/6\right|$).*

Question 5

Calculer S_N, N et l'erreur commise pour $\varepsilon \in \left\{10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-5}, 10^{-6}\right\}$. Les résultats sont ils conformes aux prévisions ? Pourrait on envisager de calculer une approximation de la somme S avec une erreur inférieure à 10^{-10} ?

3.2. Calcul «rapide»

La majoration de l'erreur (1) est dite linéaire. On se propose, dans cette section, de calculer la somme S en remplaçant la série par le calcul d'une autre de façon à obtenir une erreur quadratique, c'est-à-dire qui vérifie : il existe M telle que

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad |R_N| \leq \frac{M}{N^2}. \tag{3}$$

On constate que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n^2} = v_n + w_n \text{ où } v_n = \frac{1}{n^2(n+1)} \text{ et } w_n = \frac{1}{n(n+1)}. \tag{4}$$

Question 6

En constatant que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \tag{5}$$

montrer, en utilisant les dominos, *que la série* (w_n) *est convergente et que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1. \tag{6}$$

De façon analogue à (1), on peut montrer que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)} \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \leq \int_N^{+\infty} \frac{dx}{x^3}. \tag{7}$$

Question 7

Montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=1}^{N} v_n + \sum_{n=N+1}^{\infty} v_n$$

et en déduire, en utilisant (7)*, que pour tout* $\varepsilon > 0$*, si l'entier* N *vérifie*

$$N \geq \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}},$$

alors, en remplaçant S *par son approximation*

$$1 + \sum_{n=1}^{N} v_n, \tag{8}$$

on commet une erreur inférieure à ε*.*

Question 8

En déduire une fonction matlab ***seriec****(epsilon) qui, pour un réel epsilon strictement positif donné, renvoie la valeur de l'approximation de* S *donnée par* (8) *; de plus, cette fonction retournera le nombre de termes* N *considérés ainsi que l'erreur exacte commise.*

Question 9

Pour $\varepsilon \in \{10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-5}, 10^{-6}\}$*, comparer les résultats retournés par* serieb*(*ε*) et* seriec*(*ε*). Commentez ces résultats. Peut on calculer une approximation de la somme* S *avec une erreur inférieure à* 10^{-10} *? Comparez avec la question 5.*

4. Généralisation de l'accélération de convergence

Dans la section précédente, pour obtenir une approximation de la somme $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ avec une erreur quadratique, nous avons remplacé, dans (4), la série (u_n) par la somme de deux série : la première admet une somme connue (cf. (6)) tandis que la seconde admet un reste qui tend plus vite vers zéro que le reste de la série initiale (cf. (7)). Nous allons, dans cette section, appliquer cette même méthode pour calculer numériquement la somme S de la série de terme général :

$$u_n = \frac{n}{n^3 + 2n^2 + 4n + 3}.$$

Pour cela, on utilise le développement de Stirling pour accélérer la convergence. Dans la section, précédente, en introduisant un terme supplémentaire, on obtenait une convergence d'ordre deux ; ici, on introduit trois termes supplémentaires pour avoir une convergence d'ordre quatre : on admet qu'il existe A_1, A_2 et A_3 tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{A_1}{n(n+1)} + \frac{A_2}{n(n+1)(n+2)} + \frac{A_3}{n(n+1)(n+2)(n+3)} + v_n, \tag{9}$$

avec

$$v_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^5}\right) \text{ quand } n \text{ tend vers } +\infty. \tag{10}$$

De plus, les réels A_1, A_2 et A_3 sont donnés par

$$\begin{cases} A_1 = \lim\limits_{n\to+\infty} n(n+1)u_n, \\ A_2 = \lim\limits_{n\to+\infty} n(n+1)(n+2)\left(u_n - \dfrac{A_1}{n(n+1)}\right), \\ A_3 = \lim\limits_{n\to+\infty} n(n+1)(n+2)(n+3)\left(u_n - \dfrac{A_1}{n(n+1)} - \dfrac{A_2}{n(n+1)(n+2)}\right). \end{cases} \tag{11}$$

Question 10

Calculer (à la main) les constantes A_1, A_2 et A_3.

On admet que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = -\frac{11n^2 + 8n - 3}{n^7 + 8n^6 + 27n^5 + 55n^4 + 74n^3 + 57n^2 + 18n}.$$

Question 11

Montrer la majoration suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |v_n| \leq \frac{3 \times 11}{n^5}.$$

De façon analogue à (5) et (6), on peut montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2 \times 2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{3 \times 3!}.$$

Question 12

Montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = A_1 + \frac{A_2}{2\times 2} + \frac{A_3}{3\times 3!} + \sum_{n=1}^{N} v_n + \sum_{n=N+1}^{\infty} v_n$$

et en déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, si l'entier N vérifie

$$N \geq \sqrt[4]{\frac{33}{4\varepsilon}},$$

alors, en remplaçant S par son approximation

$$A_1 + \frac{A_2}{2\times 2} + \frac{A_3}{3\times 3!} + \sum_{n=1}^{N} v_n, \tag{12}$$

on commet une erreur inférieure à ε.

Question 13

*En déduire une fonction matlab **seried**(epsilon) qui, pour un réel epsilon strictement positif donné, renvoie la valeur de l'approximation de S donnée par (12) ; de plus, cette fonction retournera le nombre de termes N considérés.*

Question 14

Pour $\varepsilon \in \left\{10^{-4}, 10^{-10}, eps, eps/2, eps/10, 10^{-20}\right\}$, calculer seried*($\varepsilon$). Que constatez vous ?*

Question 15 – Facultatif

Combien de terme aurait il fallu prendre pour calculer une approximation de S avec une erreur inférieure à 10^{-20} sans utiliser une accélération de convergence ? Est-ce raisonnable ?

Question 16 – Facultatif

*En déduire une fonction matlab **seriee**(epsilon) qui, pour un réel epsilon strictement positif donné, renvoie la valeur de l'approximation de S sans accélération de convergence ; de plus, cette fonction retournera le nombre de termes N considérés.*