MT26 TP — UTBM-année 2000/2001
séance numéro 3 et 4 — Printemps 2001

MÉTHODE D'ACCÉLÉRATION DE CONVERGENCE DE SÉRIES

PARTIE FACULTATIVE

1. Objectifs

Dans cette partie facultative, on propose un algorithme pour calculer de façon automatique les constantes A_1, A_2, ...,A_n intervenant dans le développement de Stirling d'une série.

2. Calcul au point automatique du développement de Stirling

2.1. Majoration de l'erreur

On considère la série de terme général a_n défini par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{P(n)}{Q(n)}, \tag{1}$$

où

$$P, Q \in \mathbb{R}[X] \text{ et } \deg(Q) \geq \deg(P) + 2. \tag{2}$$

Question 16 – Facultatif

Montrer la convergence de la série (a_n) en montrant que

$$a_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On généralise ce qu'on a déjà vu pour trois termes : on admet la proposition suivante :

Proposition 2.1. *Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et pour tout couple de polynômes (P, Q) vérifiant (2), il existe un unique m-uplet $(A_1, A_2, ..., A_m) \in \mathbb{R}^m$ et une unique fraction rationnelle $R \in \mathbb{R}(X)$ tels que*

$$\frac{P}{Q} = \frac{A_1}{X(X+1)} + \frac{A_2}{X(X+1)(X+2)} + ... + \frac{A_m}{X(X+1)(X+2)...(X+m)} + R, \tag{3}$$

et

$$R(x) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^{m+2}}\right) \text{ quand } x \text{ tend vers } +\infty. \tag{4}$$

De plus, les réels A_1, A_2, ..., A_m sont donnés par

$$\begin{cases} A_1 = \lim_{x\to+\infty} x(x+1)\dfrac{P(x)}{Q(x)}, \\ A_2 = \lim_{x\to+\infty} x(x+1)(x+2)\left(\dfrac{P(x)}{Q(x)} - \dfrac{A_1}{x(x+1)}\right), \\ \vdots \\ A_m = \lim_{x\to+\infty} x(x+1)(x+2)...(x+m)\left(\dfrac{P(x)}{Q(x)} - \displaystyle\sum_{i=1}^{m-1} \dfrac{A_i}{x(x+1)...(x+m)}\right). \end{cases}$$

On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = \frac{A_1}{n(n+1)} + \frac{A_2}{n(n+1)(n+2)} + ... + \frac{A_m}{n(n+1)(n+2)...(n+m)}. \tag{5}$$

Question 17 – Facultatif

Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)...(n+k)} = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{n(n+1)(n+2)...(n+k-1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)...(n+k)}\right),$$

et en déduire la valeur exacte des sommes S_k définies par

$$\forall k \in \{1, 2, ..., m\}, \quad S_k = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)...(n+k)}. \tag{6}$$

On peut remarquer que s'il existe $C \geq 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |R(n)| \leq \frac{C}{n^{m+2}},$$

alors, on a

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} R(n)\right| \leq C\int_N^{+\infty} \frac{1}{x^{m+2}}dx = \frac{C}{(m+1)N^{m+1}}. \tag{7}$$

Question 18 – Facultatif

En déduire que, d'après la proposition 2.1,

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{k=1}^{m} A_k S_k + \sum_{n=1}^{N} R(n) + V(N), \tag{8}$$

où

$$|V(N)| \leq \frac{C}{(m+1)N^{m+1}}.$$

2.2. Calcul automatique du développement de Stirling

On se propose dans cette section d'écrire une fonction matlab qui calcule les coefficients A_k et la fraction rationnelle R qui interviennent dans (3).

On admet que (3) se réécrit sous la forme

$$\frac{P}{Q} = \frac{A_1}{X(X+1)} + \frac{A_2}{X(X+1)(X+2)} + ... + \frac{A_m}{X(X+1)(X+2)...(X+m)} + \frac{R_m}{X^{m+2}S_m},$$

où R_m et S_m sont deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que $\deg(R_m) \leq \deg(S_m)$.

On donne l'algorithme qui permet de calculer successivement les constantes A_1, A_2 ... A_m et les polynômes R_m et S_m.

Si Q est un polynôme, on note $\mathrm{dom}(Q)$ son coefficient dominant. On pose $q = \deg(Q)$ et $\Delta = \mathrm{dom}(Q)$. Voici l'algorithme qui calcule A_1, A_2 ... A_m et les polynômes R_m et S_m :

$$\begin{aligned}
&\widetilde{P} = X(X+1)P,\\
&S_1 = (X+1)Q,\\
&\text{si } \deg(P)+2 < q, \quad \begin{cases} A_1 = 0,\\ R_1 = X^2\widetilde{P},\end{cases}\\
&\text{si } \deg(P)+2 = q, \quad \begin{cases} A_1 = \frac{\mathrm{dom}(\widetilde{P})}{\Delta},\\ R_1 = X^2\left(\widetilde{P} - A_1Q\right).\end{cases}
\end{aligned}$$

Si $m \geq 2$, on exécute ensuite :

$$\begin{aligned}
&\text{si } A_1 = 0, \quad W = \widetilde{P},\\
&\text{si } A_1 \neq 0, \quad W = \widetilde{P} - A_1Q,
\end{aligned}$$

puis la boucle suivante, pour k allant de 2 à m :

$$\begin{aligned}
&\widetilde{P} = (X+k)W,\\
&\text{si } \deg\left(\widetilde{P}\right) < q, \quad \begin{cases} A_k = 0,\\ W = \widetilde{P},\end{cases}\\
&\text{si } \deg\left(\widetilde{P}\right) = q, \quad \begin{cases} A_k = \frac{\mathrm{dom}(\widetilde{P})}{\Delta},\\ W = \widetilde{P} - A_kQ.\end{cases}\\
&S_k = (X+k)S_{k-1},\\
&R_k = X^{k+1}W.
\end{aligned}$$

Dans cet algorithme, on a, par construction, pour tout $k \in \{2, ..., m\}$, $\deg\left(\widetilde{P}\right) \leq q$.

2.3. Programmation en matlab

Question 19 – Facultatif

Déduire de la section 2.2, une fonction matlab qui, pour l'entier m et les deux polynômes P et Q donnés, calcule les réels A_1, ..., A_m et les deux polynômes R_m et S_m.

Question 20 – Facultatif

En déduire ensuite une fonction matlab dont les arguments sont $m \in \mathbb{N}^*$, P et $Q \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant (2) et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ qui calcule la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ à la précision ε. Cette fonction renverra aussi le nombre N de termes pris en compte.

Question 21 – Facultatif

Calculer, avec cette fonction, les valeurs approchées des séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{1+n^2+n^4}. \tag{9}$$

Pour chacun des calculs, on fixera $m > 2$, puis on choisira le paramètre ε appartenant à l'ensemble $\left\{10^{-2}, 10^{-6}, 10^{-10}, 10^{-14}, 10^{-16}, 10^{-20}\right\}$. On fixera ensuite $\varepsilon = 10^{-20}$ et on ferra ensuite croître m. Que remarquez vous ?