Théorème de Rolle et ses conséquences
(Rolle Michel français, 1652-1719)

Exercices 1

Soit $f\ :]a,b[\longmapsto \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f'(x) < 0$ pour tout x dans $]a,b[$ et telle que :

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0$$

Démontrer que $f(x)$ ne s'annule jamais sur $]a,b[$.

Exercices 2

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R};\ e^x - 1 - x \leqslant \frac{x^2}{2}e^{|x|}$.

Exercices 3

Utiliser le théorème de Rolle pour démontrer qu'il n'existe aucun réel k tel que l'équation $x^3 - 3x + k = 0$ possède deux racines distinctes dans l'intervalle $[-1, 1]$.

Exercices 4

Par application du théorème des accroissements finis à $f(x) = \ln(x)$ sur $[n, n+1]$, montrer que $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ tend vers l'infini quand n tend vers l'infini.

Exercices 5

Utiliser le théorème des accroissements finis pour démontrer les inégalités :

$$nb^{n-1}(a-b) < a^n - b^n < na^{n-1}(a-b) \qquad \text{si} \;\; 0 < b < a.$$

Aspect global : Formule de Taylor-Lagrange et de Mac-Laurin

Exercices 6

Ecrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre trois pour la fonction f définie par $f(x) = e^x$ sur :

1. l'intervalle $[0, 2]$
2. puis sur l'intervalle $[5, 10]$

Comparer les résultats obtenus.

Exercices 7

Établir le résultat relatif aux puissances comparées au voisinage de l'infini pour $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto x^n$, c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$

Exercices 8

1. Ecrire la formule de Mac-Laurin pour les fonctions f données par :

$$f(x) = e^x; \quad \cos(x); \quad \sin(x); \quad \ln(1+x); \quad (1+x)^\alpha$$

2. On veut calculer $\cos(5^\circ)$ à 10^{-4} près ; déterminer, pour ce faire, l'ordre n du développement de Mac-Laurin de $\cos$ nécessaire en majorant le reste.

Aspect local : développements limités

Exercices 9

Donner la réponse, en la justifiant, aux questions suivantes :

a) La fonction $x \mapsto \ln(x)$ a-t-elle un développement limité en zéro ?

b) La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ a-t-elle un développement limité d'ordre 1 en zéro ?

c) La fonction $x \mapsto \sqrt{x^5}$ possède-t-elle un développement limité en zéro d'ordre 1 ? d'ordre 2 ? d'ordre 3 ?

Exercices 10

Calculer le développement limité en 0 des fonctions suivantes :

$$
\begin{array}{lll}
a) & (1+\arctan x)(e^x + 2\sin x) & \text{(ordre 3)} \\
b) & (1+2\cos(2x))(x - \ln(1+x)) & \text{(ordre 5)} \\
c) & \dfrac{1+\arctan x}{\cos x} & \text{(ordre 4)} \\
d) & (1+x)^{1/x} & \text{(ordre 2)} \\
e) & \ln \dfrac{\sin x}{x} & \text{(ordre 4)} \\
f) & \cos(e^{\frac{x}{\cos x}}) & \text{(ordre 4)}
\end{array}
$$

Exercices 11 : Applications des développements limités

1. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{a}{x}\right)^{bx} = e^{ab}$
2. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} x \left(\left(1 + \dfrac{2}{x}\right)^{x} - \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{2x} \right)$
3. Étudier $\lim\limits_{x \to 0} (\sin x + \cos x)^{\frac{1}{x}}$

Exercices 12

Soit a et b deux réels. Donner le développement limité à l'ordre en 0 de $g(x) = \ln \frac{1+ax}{1+bx}$.

1. Soit f la fonction définie, lorsque cela a un sens, par

$$f(x) = (3x^2 + 6x - 10) \ln \frac{x+4}{x+2} .$$

   Montrer qu'elle admet un développement asymptotique lorsque x tend vers l'infini, de la forme

$$f(x) = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{x^2} + \circ\left(\frac{1}{x^2}\right) ,$$

   où α, β et γ sont des réels non nuls.

2. En déduire le comportement de la courbe représentative de f à $+\infty$ et à $-\infty$.

Utilisation de Matlab

Le but de cette exercice est de vous montrer que Matlab est un logiciel qui permet non seulement de faire des calculs mathématiques et numériques, mais aussi un logiciel de calcul formel et symbolique comme Maple. En fait, une partie du noyau symbolique de matlab contient maple.

Etude des formes indéterminées : Nous avons déjà rencontré des exemples où les théorèmes généraux sur les limites ne s'appliquent pas. La notion de développement limité se montre alors d'une grande utilité, comme nous allons le voir à l'aide de la fonction $taylor()$ et $limit()$ de Matlab. Pour plus d'information sur ces fonctions, utilisez d'abord l'aide à l'aide de la commande help (par exemple help taylor).

On se propose de calculer la limite quand x tend vers 0 de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x}\left[(1+x)^{\frac{1}{2}} - (1-x)^{\frac{1}{3}}\right]$$

Cette expression se présente sous forme indéterminée $\frac{0}{0}$. Cependant, on peut conclure sa limite grâce à la notion du développement limité. En effet :

1. A l'aide de la fonction $taylor()$ de Matlab, calculer le développement limité de $(1+x)^{\alpha}$ à l'ordre 2, appliqué aux cas où $\alpha = 1/2$ et $1/3$.
2. Déduire de la question 1 le développement limité à l'ordre 1 de $f(x)$.
3. A l'aide de la fonction $taylor()$, calculer le développement limité de f à l'ordre 1. Comparer avec la question 2.
4. Déduire alors $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.
5. A l'aide de la fonction $limit()$ de Matlab, calculer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$. Comparer avec la question 4.
6. Mêmes questions pour la fonction $f(x) = (\sin x + \cos x)^{\frac{1}{x}}$.

Remarque : Pour définir par exemple la fonction $f(x) = \frac{\cos(x)}{x}$ symboliquement en Matlab , il suffit de tapper le code suivant :

```
syms x
num = cos(x) ;
denom = x ;
f = num/denom
```