TRAVAUX DIRIGÉS 1

Révisions sur les complexes

Il n'y a pas de cours correspondant à cette séance de révisions. Outre le polycopié de cours, on pourra, par exemple, consulter l'annexe I (page 147 à 158) de [**Bas04**], disponible sur internet.

1.1. Exercices

EXERCICE 1.1 (Maîtriser les diverses écritures d'un complexe).

1. Passage écriture algébrique, écriture trigonométrique

   Fournir l'écriture trigonométrique des complexes z_1, z_2, $z_1 + z_2$, $z_1 z_2$, z_1/z_2, z_1^4, pour z_1 et z_2 successivement donnés par

$$z_1 = 1 + i, \quad z_2 = 1 - i,$$
$$z_1 = 1 + 5i, \quad z_2 = 1 - 3i,$$
$$z_1 = 4 + 5i, \quad z_2 = -i.$$

2. Passage inverse.

   Traiter quelques exemples selon les besoins.

EXERCICE 1.2 (Résoudre des équations du type $z^2 = \alpha$ ou $az^2 + bz + c = 0$ dans le corps des complexes).

1. Déterminer l'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 = 1 + i$ en cherchant les solutions z de $\mathbb{C}$ sous la forme $z = a + ib$ avec a et b réels.
2. Déterminer l'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 = 1 + i$ en cherchant les solutions z de $\mathbb{C}$ sous la forme trigonométrique.
3. (a) Rappeler les formules de résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $az^2 + bz + c = 0$, pour a, b et c réels.
   (b) Ces formules sont-elles valables si a, b et c sont complexes ?
   (c) Applications numériques : traiter les deux cas

$$a = 1, \quad b = 2, \quad c = 3,$$
$$a = 1, \quad b = -4 - 3i, \quad c = 1 + 5i.$$

EXERCICE 1.3 (Résoudre des équations du type $z^k = \alpha$ dans le corps des complexes).

1. Poser le problème de la détermination de l'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^4 = 1+i$ en cherchant les solutions z de $\mathbb{C}$ sous la forme $z = a + ib$ avec a et b réels.
2. Déterminer l'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^4 = 1 + i$ en cherchant les solutions z de $\mathbb{C}$ sous la forme trigonométrique.

3. Comparer les deux méthodes et conclure.

EXERCICE 1.4 (Utilisation des complexes pour des transformations géométriques.).
On rapporte le plan P au repère orthonormé direct $\left(0, \vec{i}, \vec{j}\right)$. On note $m(x, y)$ un point quelconque du plan d'affixe $z = x + iy$ et $m'(x', y')$ d'affixe $z' = x' + iy'$, son image par différentes transformations géométriques considérées ultérieurement.

1. Déterminer la fonction $T_{\vec{u}}$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à z associe z', sachant que $m' = t_{\vec{u}}(m)$ et que $t_{\vec{u}}$ désigne la translation de vecteur $\vec{u}$ de composantes $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ dans la base $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$.

   En déduire un algorithme `translation`$\big((x, y), (\alpha, \beta) \to (x', y')\big)$ qui à partir des données de (x, y) et (α, β) détermine (x', y').
2. Déterminer la fonction R_1 de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à z associe z', sachant que $m' = r_1(m)$ et que r_1 désigne la rotation de centre O et d'angle θ.

   En déduire un algorithme `rotation1`$\big((x, y), \theta \to (x', y')\big)$ qui à partir des données de (x, y) et θ) détermine (x', y').
3. Déterminer la fonction R_2 de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à z associe z', sachant que $m' = r_2(m)$ et que r_2 désigne la rotation de centre $I(\alpha, \beta)$ et d'angle θ.

   En déduire un algorithme `rotation2`$\big((x, y), (\alpha, \beta), \theta \to (x', y')\big)$ qui à partir des données de (x, y) (α, β) et θ détermine (x', y').
4. Déterminer la fonction S de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à z associe z', sachant que $m' = s(m)$ et que s désigne la similitude de centre $I(\alpha, \beta)$, d'angle θ et de rapport k.

   En déduire un algorithme `similitude`$\big((x, y), (\alpha, \beta), \theta, k \to (x', y')\big)$ qui à partir des données de (x, y) (α, β), θ et k détermine (x', y').
5. Déterminer l'image de par la similitude de centre $I(1, 2)$, d'angle $\pi/2$ et de rapport 2 du triangle (A, B, C) dont les sommets ont pour coordonnées respectives $(1, 2)$, $(3, 4)$ et $(-3, -2)$.

1.2. Applications sous matlab

EXERCICE 1.5. En utilisant la fonction matlab fournie `td1_exo2.m`, traiter l'application numérique de la question 3c de l'exercice 1.2.
Pour faire tourner ce script, on tapera dans la fenêtre de commande matlab

```
help td1_exo2
```

pour obtenir de l'aide sur son fonctionnement, ou alors, par exemple,

```
[z1,z2]=td1_exo2(1,2,3)
```

pour la faire fonctionner.

EXERCICE 1.6. En utilisant le script matlab fourni `td1_exo4.m`, traiter l'application numérique de la question 5 de l'exercice 1.4.
Pour faire tourner ce script, on tapera dans la fenêtre de commande matlab

```
help td1_exo4
```

pour obtenir de l'aide sur son fonctionnement, ou alors

```
td1_exo4
```

pour le faire fonctionner ; laissez-vous guider par les indications !
Pour ceux qui connaissent matlab, éditez le fichier. Une ligne de code de ce source est

```
% calcul de l'image
zp=r*exp(i*theta)*((x+i*y)-(x0+i*y0))+(x0+i*y0);
```

Commentez !

1.3. Pour chercher un peu

Exercice 1.7 (Utilisation des complexes pour la résolution d'une équation différentielle).
On considère l'équation différentielle suivante

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) + c\dot{x}(t) = f\cos(\omega t), \tag{1.1}$$

qui gouverne le mouvement d'un point matériel de masse m, relié à l'association en série d'un ressort linéaire de raideur k et d'un élément de friction visqueuse d'amortissement c et soumis à la force $f\cos(\omega t)$.
On peut résoudre cette équation différentielle et montrer que, pour la solution est la somme d'une solution périodique x_1 et d'une solution x_2 qui tend vers zéro quand t tend vers l'infini. Cela traduit la présence d'un régime transitoire, à la suite duquel, on peut considérer la solution comme périodique.
Pour déterminer la solution périodique, on peut utiliser les complexes.
On cherche x, solution de (1.1) sous la forme

$$x(t) = g\cos(\omega t + \phi), \tag{1.2}$$

où g et ϕ sont deux réels (inconnus).
À cette fonction x, on associe la fonction X de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$X(t) = ge^{i(\omega t+\phi)}. \tag{1.3}$$

On remplace l'équation différentielle (1.1) par

$$m\ddot{X}(t) + kX(t) + c\dot{X}(t) = f(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)), \tag{1.4}$$

On a rappelle que si F est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ sous la forme $F(t) = a(t) + ib(t)$ où a et b sont deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors $F'(t) = a'(t) + ib'(t)$.

1. On pose $X_0 = ge^{i\phi}$. Montrer que (1.4) est équivalent à
$$m(i\omega)^2X_0 + kX_0 + ci\omega X_0 = f. \tag{1.5}$$
2. Montrer que (1.5) permet de déterminer ϕ et g en fonction de m, k, c, f et Ω.

Remarque 1.1. Ce type de méthode permet aussi de traiter des équations différentielles linéaires, provenant par exemple de problèmes d'électricité.

Exercice 1.8.
On considère un tableau carré M de n^2 réels (n est un entier naturel non nul).
Fournir une méthode permettant de construire le rotaté de $\pi/2$, noté M', de M par rapport à son centre et utilisant les résultats de l'exercice 1.4.
Indications : On commencera d'abord par définir le centre du tableau en tenant compte de la parité de n ; on établira une correspondance entre les indices de lignes et de colonnes des éléments de M

avec les coordonnées de points du plan dans un repère à choisir. On effectuera alors la transformation demandée sur les points ; on interprétera finalement en termes d'éléments de M'.

REMARQUE 1.2. Ce type d'outil est utilisé dans le cadre de problèmes de reconnaissance de formes dans certains processus industriels.