TRAVAUX DIRIGÉS 2

Matrices

2.1. Exercices

EXERCICE 2.1. On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 3 \\ 6 & -2 & -1 & 7 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -5 & 2 \\ 3 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

1. Calculer AB.
2. Calculer ABC.
3. La matrice D est-elle inversible ? Si oui, déterminer son inverse.

EXERCICE 2.2. Soit la matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donnée par :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Déterminer l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A (pour le produit matriciel).

EXERCICE 2.3. Soit la matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donnée par :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

1. Déterminer A^2 et vérifier que $A^2 = aA + bI$ avec a et b à déterminer.
2. Déduire de l'expression antérieure l'existence d'une matrice inverse pour A dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On cherchera B telle que $AB = BA = I$.
3. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ ($n \geq 2$), la matrice A^n s'écrit :

   $$A^n = \alpha_n A + \beta_n I.$$

   Déterminer les suites α_n et β_n.
4. Application : fournir A^5.

EXERCICE FACULTATIF 2.4. Soit la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ 4 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

1. Déterminer A^2 et A^3.
2. Ecrire A^3 en fonction de A^2, A et I.

3. En déduire l'existence d'une matrice inverse pour A dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
4. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, la matrice A^n s'écrit :
$$A^n = \alpha_n A^2 + \beta_n A + \gamma_n I.$$
Déterminer les suites α_n, β_n et γ_n.

2.2. Applications sous matlab

EXERCICE 2.5. En utilisant le script matlab fourni `td2_exo1.m`, reprendre la question 3 de l'exercice 2.1.

EXERCICE 2.6. En utilisant la fonction matlab fournie `td2_exo3.m`, reprendre la question 4 de l'exercice 2.3. On pourra calculer A^n pour des «grandes» valeurs de n. Que constate-t-on ?

2.3. Pour chercher un peu

EXERCICE 2.7 (Traduction matricielle de certaines transformations complexes).
On reprend les notation de l'exercice 1.4. Dans cet exercice, on a écrit une transformation plane sous la forme

$$z' = F(z), \tag{2.1}$$

où F est une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.
On cherche à transformer cela sous la forme d'une expression matricielle :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

où A est une matrice à coefficients réels, $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ un vecteur colonne et $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$.

1. Pour chacune des transformations $t_{\vec{u}}$, r_2 et s, vues dans l'exercice 1.4, trouver l'expression des matrices A et $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$.
2. Est-ce que toute transformation complexe de la forme (2.1) peut s'écrire sous la forme (2.2) ?
3. Si on connaît une expression d'une transformation géométrique simple de la forme (2.2), comment peut-on retrouver la forme (2.1) ?
4. On considère maintenant $p_{\mathcal{D}}$ la projection orthogonale sur la droite $\mathcal{D}$, d'équation $y = x/2$. On admet que la forme (2.2) est
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$
Peut on écrire l'équation (2.3) sous la forme (2.1) ?