Utbm mt30 xt30 **td Espaces vectoriels** **Automne 2005**

Exercice 1 Sous-espaces vectoriels

Pour chacun des exercices suivants,on déterminera un espace vectoriel "sous lequel se placer", puis on établira que les parties proposées en sont ou non des sous-espaces.

1.1 $E = \{(3a, -2a)/a \in \mathbb{R}\}$; $F = \{(2b, b)/b \in \mathbb{R}\}$; $E \cup F$; $E \cap F$

1.2 $\mathcal{P}_2 = \left\{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad / \quad \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad p(x) = ax^2 + bx + c\right\}$;

$F = \left\{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / \exists a \in \mathbb{R} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad p(x) = ax^2\right\}$;

$G = \left\{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / \exists (b, c) \in \mathbb{R}^2 \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad p(x) = bx + c\right\}$;

$E \cap F$; $E \cap G$; $G \cap F$; $E \cup F$; $E \cup G$; $G \cap F$;

1.3 $E = \left\{(a, -5b + c, 3a - c) \quad / \quad (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\right\}$;

$F = \{(a, -2a, 3a)/a \in \mathbb{R}\}$; $E \cap F$.

1.4 $E = \left\{M = \begin{bmatrix} a & b \\ -2b & -a \end{bmatrix} \quad / \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\}$;

$F = \left\{M = \begin{bmatrix} a - b & -b \\ b + a & a - 2b \end{bmatrix} \quad / \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\}$; $G = \left\{M = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix} \quad / \quad a \in \mathbb{R}\right\}$

Exercice 2 Familles libres, liées, génératrices ; bases

Pour chacun des exercices suivants, on déterminera un espace vectoriel "sous lequel se placer" avant de répondre à la question proposée.

2.1 Les familles suivantes sont-elles libres?

$F = \{(1, 1); (1, -1)\}$; $F = \{(1, 0); (0, 1)\}$; $F = \{(1, 1)\}$; $F = \{(0, 0)\}$;

$F = \{(1, 1, 0); (1, -1, 0)\}$; $\{(1, 1, 1); (1, -2, 2); (2, -1, 3)\}$.

$F = \left\{\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\right\}; F = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$

2.2 Etablir que les familles suivantes sont liées.

$F = \{(1, 1); (\pi, \pi)\}$; $F = \{(1, 0); (0, 1); (4, 5)\}$; $F = \{(0, 0)\}$;

$F = \{(1, 1, 0); (1, -1, 1); (3, 1, 1)\}$;

$F = \left\{\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\right\}; F = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$

2.3 Les familles suivantes sont-elles génératrices, puis bases de l'espace vectoriel considéré?

- Dans $\mathcal{P}_2$ (voir 1.2)
  $\{p_i\}_{0 \leq i \leq 2}$ avec p_i fonction de $\mathcal{P}_2$ définie par: $p_i(x) = x^i$
- Dans $\mathbb{R}^2$
  Reprendre les premiers exemples de 2.1
- Dans $\mathbb{R}^3$
  Reprendre les deuxièmes exemples de 2.1
- Dans $\mathcal{M}_2(\ \mathbb{R})$
  Reprendre les derniers exemples de 2.1
- Dans $\mathbb{C}$ espace vectoriel sur $\mathbb{C}$
  Etudier les familles suivantes: $\{i\}$ puis $\{1, i\}$.

Exercice 3 Applications linéaires et leurs matrices

3.1 On considère l'application f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par:

$$f(x, y, z) = (3x - y + z, 2y, x + y - z)$$

(a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
(b) Déterminer $\ker(f)$. Etudier la bijectivité de f .
(c) Quelle est la dimension de $\mathrm{Im}(f)$? En déduire une base de $\mathrm{Im}(f)$.
(d) Fournir la matrice de f relativement à la base canonique.

3.2 Même questions adaptées au cas de g de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par:

$$g(x, y, z) = (3x - y + 3z, 2y, x + y + z).$$

3.3 On considère l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des vecteurs du plan $\mathcal{V}_2$ rapporté à une base orthonormée directe $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

(a) Montrer que toute rotation vectorielle r_θ d'angle θ est un endomorphisme de $\mathcal{V}_2$.(Nb: on pourra admettre cette propriété qui sera rendue intuitive par les enseignants de td.)
(b) Donner l'image par r_θ des vecteurs de la base $\mathcal{B}$ .En déduire la matrice relativement à la base considérée de r_θ .
(c) Fournir l'image d'un vecteur quelconque de $\mathcal{V}_2$ connu par ses composantes dans la base $\mathcal{B}$.
(d) Déterminer image et noyau de cet endomorphisme.

3.4 On considère l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des vecteurs de l'espace $\mathcal{V}_3$ rapporté à une base orthonormée directe $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.

(a) Mêmes questions qu'en 3.3, en considérant la rotation vectorielle $r_{\theta,\overrightarrow{k}}$ d'angle θ , d'axe $\overrightarrow{k}$.
(b) Mêmes questions adaptées au cas d'une homothétie vectorielle de rapport k ($k \in \mathbb{R}^*$).

Exercice 4 Anneau des matrices carrées $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

4.1 On donne la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.Déterminer l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A (pour le produit matriciel).

4.2 On donne la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.Déterminer A^2 et vérifier que $A^2 = aA + bI$ avec a et b à déterminer.

(a) Déduire de l'écriture antérieure l'existence d'une inverse pour A dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.On cherchera B telle que $AB = BA = I$.
(b) Montrer que pour tout n de $\mathbf{N}$ ($n \geq 2$),la matrice A^n s'écrit
$A^n = \alpha_n A + \beta_n I$;déterminer les suites (α_n) et (β_n).
Application: fournir A^5.

Exercice 5 Déterminants

5.1 Calculer les déterminants suivants :

$$d_1 = \begin{vmatrix} a-b & a \\ a & a+b \end{vmatrix}; \quad d_2 = \begin{vmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 5 & t-3 & 1 \\ 6 & -6 & t+4 \end{vmatrix}; \quad d_3 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}.$$

où a, b, c, t désignent des réels.

5.2 Déterminants de Vandermond

(a) Soit $a_1, ..., a_n$ des réels. Calculer

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} \quad \text{puis} \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{vmatrix}$$

(b) Généralisation

On considère un déterminant D_n construit comme l'ont été antérieurement D_2 , D_3 , à partir de $a_1, ..., a_n$. Montrer que:

$$D_n = \lambda_n \prod_{\substack{(i,j)\in\{1,\dots,n\}^2 \\ i<j}} (a_i - a_j) \text{ avec } \lambda_n \in \mathbb{R}^*$$

5.3 Inversion de matrices

Déterminer les inverses des matrices suivantes:

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}; \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

5.4 Changements de bases

On considère l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions polynômes de degré au plus trois (ou nulles), noté $\mathcal{P}_3$. On note $\mathcal{B}$ sa base canonique. Soit $\mathcal{B}' = (L_0, L_1, L_2, L_3)$ avec, pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$L_0(x) = 1; L_1(x) = x; \quad \forall i \geq 2 \qquad L_{i+1}(x) = \frac{2i+1}{i+1} x L_i(x) - \frac{i}{i+1} L_{i-1}(x)$$

(a) Déterminer $\mathcal{B}'$ et montrer que c'est une base de $\mathcal{P}_3$.

(b) Donner la matrice M de l'isomorphisme identité, noté id, de $(\mathcal{P}_3, \mathcal{B}')$ dans $(\mathcal{P}_3, \mathcal{B})$. En déduire la matrice M' de la réciproque de id. Comment interpréter M'?

Exercice 6 Réductions d'endomorphismes

6.1 On donne la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, considérée comme la matrice d'un endomorphisme u de $\mathbb{R}^2$ rapporté à sa base canonique $\mathcal{B}$.

(a) Déterminer les valeurs propres de A ainsi que ses espaces propres.

(b) En déduire une base propre de $\mathbb{R}^2$ pour u, notée $\mathcal{B}'$ .Déterminer la matrice de passage $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, notée P.

(c) Calculer $D = P^{-1}AP$. Le résultat est-il surprenant? Calculerez-vous la prochaine fois?

(d) Déterminer pour tout n de $\mathbf{N}$:

$$Q_n = D^n$$

.

6.2 On rapporte $\mathbb{R}^3$ à sa base canonique, notée encore $\mathcal{B}$.

Pour les matrices suivantes, considérées comme celles d'un endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$,déterminer valeurs propres et espaces propres . Conclure quant à leur caractère diagonalisable.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}; \qquad C = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix}.$$