td2 Suites et séries numériques

Avertissement pour les sujets de travaux dirigés :

- Les exercices proposés représentent, pour chacun d'eux, des types de savoir-faire exigibles sous mt30 et xt30 ; en conséquence, chacun comporte en général plusieurs variantes qui ne seront pas nécessairement toutes traitées en travaux dirigés. Seule le premier sera traité fréquemment; vous pourrez demander des indications relatives au mode de traitement des autres à vos enseignants.
- Quelques sujets ou portions de sujets d'examens des années antérieures y figureront fréquemment .
- La feuille d'exercices se terminera autant que possible par une rubrique "Pour chercher", destinée à faire envisager des prolongements des notions abordées, dont une partie invite à l'utilisation du logiciel de calcul matlab. Les solutions proposées (complètes ou partielles) seront transmises à Jn Martin qui en assurera la correction; les travaux produits interviendront comme un plus dans l'évaluation de contrôle continu relative à mt30, xt30.

Exercice 1 *Définition de limite et aspect numérique: vitesse de convergence*

On considère le réel strictement positif p .
On donne la suite (u_n) par :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad u_n = \frac{1}{n^p}$$

1.1 Déterminer par les théorèmes sur les limites $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

1.2 En utilisant la définition de Cauchy, pour un ε de $\mathbf{R}^{+*}$ donné, déterminer un entier naturel n_0 (il sera fonction de p et ε) tel que pour tout entier naturel $n \geq n_0$, on ait $|u_n - 0| \langle \varepsilon$.

1.3 On se propose de fournir une valeur approchée de la limite de (u_n) à ε près en calculant les termes consécutifs de la suite.
En fonction de p et ε, déterminer le nombre de termes qu'il sera nécessaire de calculer pour obtenir une valeur approchée convenable de la limite cherchée.
Fournir quelques applications numériques.

1.4 Montrer comment le terme $n_0\,(p,\varepsilon)$ fournit un renseignement sur la vitesse de convergence de la suite (u_n).

Exercice 2 *Convergence et calcul de limites par théorèmes sur les limites et techniques connexes*

Etablir la convergence des suites (u_n) données et calculer leur limite, sachant que:

$$u_n = \frac{2n+5}{-n^3+3n+1} \qquad u_n = \frac{\cos n}{n} \qquad u_n = \frac{n^2-\cos n}{2(n^2-1)} \qquad u_n = \frac{\sqrt{16n^2+5n+1}}{2n-5}$$
$$u_n = \frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n}{n^2} \qquad u_n = \left(\frac{n-3}{5n-1}\right)^n \qquad u_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n} \qquad u_n = \sum_{i=0}^{n} r^i \ \ (0\langle r\langle 1)$$

NB: Avant tout calcul, on fera l'analyse des formes proposées afin d'avoir l'intuition des résultats qui seront prouvés ensuite. Faire un bilan des méthodes employées; ceci représente l'intérêt majeur de l'exercice.

Exercice 3 *Suites monotones et bornées*

3.1 On donne (u_n) par : $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbf{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{5u_n - 4}$

(a) Montrer que la suite (u_n) est bornée (NB : on pourra montrer par récurrence que $2 \leq u_n \leq 4$).

(b) Etudier la monotonie de la suite (u_n).

Indication: Vu la positivité de u_n d'après (a), on remarquera que comparer u_{n+1} et u_n revient à comparer leurs carrés. On étudiera donc le signe pour tout n de $u_{n+1}^2 - u_n^2$ qu'on écrira comme un trinôme en u_n dont le signe sera connu via (a).

(c) En déduire la convergence de (u_n). Déterminer sa limite, grâce à l'étude de l'équation aux limites.

3.2 On donne (u_n) par: $u_0 \in \mathbf{R}$ et $\forall n \in \mathbf{N} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(1 + u_n^2\right)$

(a) Etudier la monotonie de (u_n).

(b) Si (u_n) converge, quelles sont les limites possibles?

(c) Etudier la convergence de (u_n) selon $|u_0|$.

Exercice 4 *Convergence de séries par la définition*

4.1 On considère la série $(\sum u_n)$ définie par: $\forall n \in \mathbf{N}^* \quad u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

(a) Ecrire $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ sous la forme $\frac{a}{2n-1} - \frac{b}{2n+1}$ avec a, b des réels à déterminer, indépendants de n.

(b) En déduire l'écriture explicite de $S_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$. En utilisant la définition de la convergence d'une série, conclure quant à $(\sum u_n)$;

4.2 Autre exemple

(a) Etudier la convergence de $(\sum u_n)$ définie par:

$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

(b) La suite (u_n) converge-t-elle? Si oui vers quelle limite?

Exercice 5 *Convergence de séries par utilisation des critères*

L'essentiel est de saisir quel(s) critère(s) peut (vent) s'appliquer aux exemples proposés, car une même série peut être considérée parfois de plusieurs types. On cherchera d'abord à avoir l'intuition du résultat avant d'en déduire le choix d'une méthode de preuve.

5.1 Montrer, par le critère de comparaison, que la série $\left(\sum \frac{1}{n}\right)$ diverge.

5.2 Etudier la convergence des séries $(\sum u_n)$ suivantes données par:

$$u_n = \frac{n+2\sqrt{n}}{2n^3+1} \qquad u_n = e^{-n^3} \qquad u_n = \sin^3\left(\frac{1}{n}\right) \qquad u_n = n^2\sqrt{n}e^{-n^2}$$

$$u_n = \frac{(-1)^n}{5^{2n+1}} \qquad u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{(n+2)^2}\right) \qquad u_n = \frac{(-1)^n}{2n-1} \qquad u_n = \frac{1}{n\ln n}$$

Exercice 6 *Séries de fonctions*

De façon extrèmement fréquente, l'ingénieur a besoin d'étudier la convergence de séries dont le terme général ordinairement noté u_n dépend d'un paramètre réel x ; on le note donc $u_n(x)$. Si la série $(\sum u_n(x))$ converge, il est alors naturel de noter sa somme $S(x)$.

On parle alors de séries de fonctions : justifier le choix de ce terme.

Soit n de $\mathbf{N}$. On donne le terme $u_n(x)$ par:

$$u_n(x) = \frac{x^n}{n!} \qquad u_n(x) = \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad u_n(x) = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \qquad u_n(x) = \frac{1}{2n+1}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^{n+1}$$

Déterminer pour quelles valeurs de x les séries $(\sum u_n(x))$ convergent, pour quelles valeurs elles divergent. Reconnaît-on certaines sommes ?

Pour chercher

Sujet 1 : vitesse de convergence d'une série

L'objectif est de regarder de près comment une série converge vers sa limite, à quelle vitesse !

1.1 On considère la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2-1}$, pour $n \geq 2$.

(a) Montrer que la série $(\sum u_n)$ converge par le critère des séries alternées.

(b) *Calcul approché de* $s = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} u_n$

On désire obtenir une valeur approchée de s à 10^{-2} près, en calculant la somme partielle $s_n = \sum\limits_{k=2}^{n} u_k$.

On utilise le résultat du cours qui annonce que l'erreur de troncature est majorée par la valeur absolue du premier terme négligé.

Proposer un entier n convenable et donner l'encadrement de s obtenu numériquement.

(c) *Calcul exact de* s

Déterminer les coefficients a et b indépendants de n tels que :

$$\frac{1}{n^2-1} = \frac{a}{n-1} + \frac{b}{n+1} \tag{1}$$

En déduire $s_{2p} = \sum\limits_{k=2}^{2p} u_k$ en fonction de p; en déduire alors $s = \lim\limits_{p \to +\infty} s_{2p}$.

Vérifier la cohérence avec le calcul approché antérieur.

1.2 Justifier la convergence de la série $(\sum v_n)$ avec $v_n = \frac{1}{n^2-1}$, pour $n \geq 2$.

Calculer alors sa somme $s' = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} v_n$.

Nb: On pourra utiliser la décomposition obtenue par la relation (1).

Sujet 2 : preuve du critère intégral

On se propose ici d'établir en détail le critère intégral, relatif aux séries.L'étude en est intéressante, car elle montre bien le lien entre séries et intégrales.

Soit une fonction f satisfaisant aux hypothèses du critère intégral. On pose ici $N = 1$, mais la preuve générale s'en déduit aisément.

2.1 Montrer que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad u_{n+1} \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq u_n$$

2.2 Sommer les inégalités précédentes pour $1 \leq n \leq M-1$, où M désigne un entier naturel donné.
En déduire que :

$$\sum_{i=2}^{M} u_i \leq \int_1^M f(x)dx \leq \sum_{i=1}^{M-1} u_i$$

2.3 Interpréter géométriquement les inégalités précédentes.

2.4 Conclure par le critère de comparaison.

Sujet 3 : utilisation de matlab

Les sources matlab produits seront placés sur un support transmis avec l'étude à Jn Martin; ce support sera évidemment restitué après correction.

On se propose d'étudier via matlab la suite dite de Fibonaci définie par :

$$u_0 = 1; u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

3.1 Ecrire une fonction $fibonaci\,(n)$ qui

- à partir de l'entier naturel non nul n
- renvoie le vecteur des n premières valeurs de la suite (u_n).

Nb : on pourra adjoindre un second paramètre à cette fonction pour permettre l'affichage du résultat avec un certain nombre de chiffres significatifs. Voir la fonction *vpa*.

3.2 Ecrire une fonction $versphi\,(n)$ qui

- à partir de l'entier naturel non nul n
- renvoie un vecteur représentant les n premiers termes de la suite (v_n) définie par :

$$v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

Nb : on pourra éventuellement demander deux sorties de la valeur de v_n : une "numérique" en choisissant éventuellement le nombre de significatifs, une fractionnaire en "forçant" le résultat à être un symbolique de type $'r'$, c'est-à-dire une fraction d'entiers naturels. Voir la fonction *sym*.

3.2 Proposer une fonction qui visualise les modalités de convergence de la suite (v_n) vers le nombre d'or $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$.