XT30 Automne 2005

Examen de TD(2) du 29 novembre 2005

Durée : 1,5 heure(s)

Calculatrice autorisée.

Exercice 1 (complexes)**.**

1. Calculer le module et un argument des nombres complexes suivant :

$$z_1 = 2i, \quad z_2 = 8 + 8i.$$

2. En déduire, sous forme exponentielle, les nombres $1/z_1$, $1/z_2$, z_1^2, z_2^2 ainsi qu'une racine carrée de chacun des nombres z_1 et z_2.

Exercice 2 (suites)**.**

1. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \cos\left(\frac{1 + \frac{(-1)^n}{n^2}}{n}\right).$$

   Est-ce que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente ? Quelle est sa limite ?

2. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = n\left(\ln\left(\frac{1+n+n^2}{2n+n^2}\right) - \ln\left(\frac{1+n}{n}\right)\right).$$

   (a) Peut-on utiliser les règles usuelle de calcul de limite pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

   (b) Rappeler les développements limités des fonctions $x \mapsto 1/(1+x)$ et $x \mapsto \ln(1+x)$ en zéro à l'ordre 1.

   (c) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln\left(\frac{1+n+n^2}{2n+n^2}\right) = -\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\varepsilon_1(n),$$
$$\ln\left(\frac{1+n}{n}\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\varepsilon_2(n),$$

   où $\varepsilon_1(n)$ et $\varepsilon_2(n)$ tendent vers zéro quand n tend vers l'infini.

   (d) Conclure.

Exercice 3 (séries).

1. Soit la série $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général défini par
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = 1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right).$$
Démontrer en utilisant le développement limité à l'ordre 2 de la fonction cosinus en zéro que la série de terme général u_n est convergente.
2. Soit pour x réel, la série (de fonction) de terme général défini par
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n(x) = \frac{x^n}{n!}.$$
   (a) Montrer que la série de terme général $(u_n(x))$ est convergente.

   (b) Sans démonstration, essayez de trouver la limite de la série de fonction de terme général $(u_n(x))$.
   Essayez de démontrer ce résultat.

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/`