XT30 Automne 2005

# Corrigé de l'examen de TD(2) du 29 novembre 2005

## Correction de l'exercice 1.

1. On a

$$\boxed{z_1 = 2\, e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad z_2 = 8\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}.}$$

2. Pour $q \in \mathbb{Z}$, on a

$$\left(\rho\, e^{i\theta}\right)^q = \rho^q\, e^{iq\theta}. \tag{1}$$

Pour $q \in \{-1, 2\}$, on a donc

$$\boxed{\frac{1}{z_1} = \frac{1}{2}\, e^{-i\frac{\pi}{2}}, \quad \frac{1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{16}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}.}$$

$$\boxed{z_1^2 = 4\, e^{i\pi} = -4, \quad z_2^2 = 128\, e^{i\frac{\pi}{2}} = 128i.}$$

En utilisant (1) formellement pour $q = 1/2$, on obtient $\widetilde{z}_1$ et $\widetilde{z}_2$ une racine de $z_1$ et $z_2$ (les deux autres étant les opposés de $\widetilde{z}_1$ et $\widetilde{z}_2$) :

$$\boxed{\widetilde{z}_1 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad \widetilde{z}_2 = 2\sqrt{2\sqrt{2}}\, e^{i\frac{\pi}{8}}.}$$

## Correction de l'exercice 2.

1. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \cos\left(\frac{1 + \frac{(-1)^n}{n^2}}{n}\right).$$

On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2},$$

et d'après le théorème des gendarme la suite de terme général $\frac{(-1)^n}{n^2}$ tend vers zéro quand $n$ tend vers l'infini. En particulier, l'expression $1 + \frac{(-1)^n}{n^2}$ est bornée quand $n$ tend vers l'infini, et de nouveau, d'après le théorème des gendarmes, la suite de terme général $\frac{1+\frac{(-1)^n}{n^2}}{n}$ tend vers zéro. Puisque la fonction cosinus est continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit que

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente et sa limite est } \cos(0) = 1.}$$

2. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = n\left(\ln\left(\frac{1+n+n^2}{2n+n^2}\right) - \ln\left(\frac{1+n}{n}\right)\right).$$

(a) On voit apparaître dans l'expression de $u_n$ des formes indéterminée de type $\infty/\infty$ ; on ne peut utiliser les règles usuelles.

Pour lever l'indétermination des termes $\frac{1+n+n^2}{2n+n^2}$ et $\frac{1+n}{n}$, on écrit de façon habituelle

$$v_n = \frac{1+n+n^2}{2n+n^2} = \frac{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}+1}{\frac{2}{n}+1}, \tag{2}$$

$$w_n = \frac{1+n}{n} = 1+\frac{1}{n}, \tag{3}$$

$$\tag{4}$$

On a donc

$$\lim_{n\to\infty} v_n = 1, \tag{5}$$

$$\lim_{n\to\infty} w_n = 1. \tag{6}$$

Dans l'expression de $u_n$, on voit donc apparaître la forme indéterminée $\infty \times 0$ : on ne peut toujours pas utiliser les règles usuelles.

(b) On rappelle que, d'après le cours (ou le TD), quand $x$ tend vers zéro :

$$\boxed{\frac{1}{1+x} = 1 - x + \mathrm{o}(x),} \tag{7}$$

$$\boxed{\ln(1+x) = x + \mathrm{o}(x).} \tag{8}$$

On a utilisé les notations de Landau.

(c) Grâce à (2) et (7), on a donc successivement en appliquant les règles usuelles sur les développement limités (à l'ordre un) pour $n \to \infty$

$$\begin{aligned}
v_n &= \frac{1+n+n^2}{2n+n^2},\\
&= \frac{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}+1}{\frac{2}{n}+1},\\
&= \left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)^{-1},\\
&= \left(1+\frac{1}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)^{-1},\\
&= \left(1+\frac{1}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1-\frac{2}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right),\\
&= 1-\frac{1}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

On obtient donc, grâce à (8),

$$\begin{aligned}\ln(v_n) &= \ln\left(1-\frac{1}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right),\\ &= -\frac{1}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

De même, grâce à (3) et (8), on a donc

$$\begin{aligned}\ln(w_n) &= \ln\left(1+\frac{1}{n}\right),\\ &= \frac{1}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

Bref, on a, pour tout $n$,

$$\boxed{\ln\left(\frac{1+n+n^2}{2n+n^2}\right) = -\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\varepsilon_1(n),} \tag{9}$$

$$\boxed{\ln\left(\frac{1+n}{n}\right) = \frac{1}{n}+\frac{1}{n}\varepsilon_2(n),} \tag{10}$$

où $\varepsilon_1(n)$ et $\varepsilon_2(n)$ tendent vers zéro quand $n$ tend vers l'infini.

(d) D'après (9) et (10), on a donc

$$\begin{aligned}u_n &= n\left(\ln\left(\frac{1+n+n^2}{2n+n^2}\right)-\ln\left(\frac{1+n}{n}\right)\right),\\ &= n\left(-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\varepsilon_1(n)-\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\varepsilon_2(n)\right),\\ &= -2+\varepsilon_1(n)-\varepsilon_2(n),\end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} u_n = -2.} \tag{11}$$

**Correction de l'exercice 3.**

1. Soit la série $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général défini par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = 1-\cos\left(\frac{1}{n}\right).$$

$u_n$ est toujours positif. D'autre part, on écrit au voisinage de zéro

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+\mathrm{o}\left(x^2\right),$$

et donc, si $n$ tend vers l'infini,

$$u_n = 1-\cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1-\left(1-\frac{1}{2n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{2n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

On a donc

$$u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2},$$

et puisque la série de terme général $1/n^2$ est convergente, alors

$$\boxed{\text{la série de terme général } u_n \text{ est convergente.}}$$

2. Soit pour $x$ réel, la série (de fonction) de terme général défini par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n(x) = \frac{x^n}{n!}.$$

(a) On a, pour tout $n$, pour tout réel $x$ non nul,

$$\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \frac{x}{n+1},$$

quantité qui tend vers zéro quand $n$ tend vers l'infini. D'après le critère de d'Alembert, la série de terme général $(u_n(x))$ est convergente. Cela est naturellement vrai si $x$ est nul. On a donc montré que

$$\boxed{\text{Pour tout } x \text{ réel, la série de terme général } u_n(x) \text{ est convergente.}}$$

(b) On vient de démontrer l'existence de

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right).$$

À $n$ fixé, on reconnaît les $n+1$ termes du développement limité de la fonction exponentielle en zéro ! On utilise donc la formule de Taylor Mac-Laurin à la fonction exponentielle en zéro : pour tout $n$,

$$e^x = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\xi_x},$$

où $\xi_x$ appartient à $[0,x]$ ou $[x,0]$ (selon que $x$ est positif ou non). On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = \sum_{k=0}^{n} u_k(x) + R_n(x), \tag{12}$$

où

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\xi_x}.$$

On vérifie que, $x$ soit négatif ou positif, on a

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|} = u_{n+1}(|x|) e^{|x|} \tag{13}$$

Puisque la série de terme général $u_n(|x|)$ est convergente, on a

$$\lim_{n\to\infty} u_n(|x|) = 0. \tag{14}$$

D'après (13) et (14), on a donc, pour tout $x$ réel,

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0,$$

et donc, en passant à la limite quand $n$ tend vers l'infini dans (12),

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x).$$

Bref, on a démontré que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},}$$

parfois noté sous la forme

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots}$$