

L'utilisation de la calculette est non seulement autorisé mais indispensable...
On rédigera absolument les exercices sur des copies séparées.

Exercice 1 *Matrices*

On considère l'ensemble $M_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées de côté 2 à coefficients réels; on note Θ la matrice nulle.

1.1 Soit A et B de $M_2(\mathbb{R})$ données par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- a) Montrer que : $AB = BA = \Theta$.
- b) Montrer par récurrence, que pour tout n de \mathbb{N}^* $A^n = A$.
- c) Montrer par récurrence, que pour tout n de \mathbb{N}^* :

$$\text{si } n \text{ est impair } B^n = B; \quad \text{si } n \text{ est pair } B^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

d) Soit x et y des nombres réels. Déduire des questions b) et c), l'expression de $(xA)^n$ et de $(yB)^n$ pour tout n de \mathbb{N}^* .

1.2 On se propose d'étudier les puissances successives de $xA + yB$, pour des réels x et y quelconques.

a) En utilisant le 1.1 a), montrer par récurrence que pour tout n de \mathbb{N}^* on a :

$$(A + B)^n = A^n + B^n.$$

b) En utilisant le 1.1 b) et c), fournir l'expression de $(xA + yB)^n$ en fonction de x , y et n .

c) *Applications*

- Utiliser les résultats antérieurs et donner l'expression de $\begin{pmatrix} x & 0 \\ x+y & -y \end{pmatrix}^{17}$ en fonction de x et y .
- En déduire l'expression de $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 2x & -x \end{pmatrix}^{10}$ en fonction de x .

.../...

Exercice 2 *Suites numériques*

On considère les fonctions g et F définies sur $[0, 1]$ par:

$$g(x) = \frac{1}{2}x^2 \quad \text{et} \quad F(x) = g(x) - x.$$

2.1 *Résultats techniques*

- a) Etudier les variations de g et de F sur $[0, 1]$.
b) Dédire des études précédentes que :

$$\forall x \in [0, 1] \quad g(x) \in [0, 1] \quad \text{et} \quad g(x) \leq x.$$

2.2 On considère la suite (x_n) définie par le choix d'un x_0 quelconque de $[0, 1]$ et pour tout n de \mathbb{N}

$$x_{n+1} = g(x_n).$$

- a) Montrer en utilisant la question 2.1, que x_n est défini pour tout n et que la suite (x_n) est décroissante.
b) Montrer que (x_n) est convergente. Déterminer sa limite.

Exercice 3 *Formules de Taylor*

3.1 *Approximations de $\cos x$ et $\sin x$* : attention x est mesuré en radians.

- a) Montrer que pour tout entier naturel n et tout réel x

$$\begin{cases} \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_n^c, \\ \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_n^s, \end{cases} \quad (\text{R1})$$

avec

$$|R_n^c| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \quad \text{et} \quad |R_n^s| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}.$$

- b) On note désormais

$$\begin{cases} C_n(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \\ S_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \end{cases}$$

Pourquoi les formules (R1) permettent-elles d'obtenir une approximation de $\cos x$ et $\sin x$, avec une erreur dont la valeur absolue est respectivement inférieure à $|x|^{2n+2}/(2n+2)!$ et $|x|^{2n+3}/(2n+3)!$?

3.2 On suppose pour toute cette question que $x = 10^{-3}$.

- a) Déterminer un entier n_1 tel que

$$\frac{|x|^{2n_1+2}}{(2n_1+2)!} \leq 10^{-9} \quad \text{et} \quad \frac{|x|^{2n_1+3}}{(2n_1+3)!} \leq 10^{-9}.$$

Nb: on pourra procéder par "tâtonnement".

.../...

- b) En calculant $C_n(10^{-3})$ et $S_n(10^{-3})$ pour $n = 1$, proposer une approximation de $\cos(10^{-3})$ et de $\sin(10^{-3})$ à 10^{-9} près.

Comparez ces valeurs approchées aux valeurs de $\cos(10^{-3})$ et de $\sin(10^{-3})$ "exactes" renvoyées par la machine et commentez brièvement.

3.3 On suppose pour toute cette question que x est élément de $[0, \pi/4]$.

- a) Montrer que

$$\frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \leq \frac{1}{(2n+2)!} \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n+2} \quad \text{et} \quad \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!} \leq \frac{1}{(2n+3)!} \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n+3}.$$

- b) Montrer que pour $n = 5$, on a pour tout x de $[0, \pi/4]$:

$$\begin{cases} |\cos x - C_n(x)| \leq 10^{-9}, \\ |\sin x - S_n(x)| \leq 10^{-9}. \end{cases} \quad (\text{R2})$$

- c) Dédurre des relations (R2) une approximation de $\cos x$ et de $\sin x$ pour x élément de $\{10^{-3}, \pi/7, \pi/4\}$. Comparez-les aux valeurs "exactes" renvoyées par la machine et commentez brièvement.

- d) Comparez et commentez les méthodes des questions 3.2 et 3.3.

3.4 *Extension des résultats obtenus*

- a) Comment peut-on utiliser les résultats de la question 3.3 pour calculer des approximations du cosinus et du sinus de tout réel à 10^{-9} près?
- b) Proposez des approximations de $\cos x$ et de $\sin x$ à 10^{-9} près pour x élément de $\{\pi/3, 3.2, 6\}$. Comparez-les aux valeurs "exactes" renvoyées par la machine et commentez brièvement.