

Exercice 1 *Matrices*

On considère l'ensemble $M_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées de côté 2 à coefficients réels; on note Θ la matrice nulle.

1.1

a) La vérification de $AB = BA = \Theta$ est immédiate.

b) On note $P(n)$ la propriété suivante:

$$P(n) : A^n = A.$$

- Base: $P(1)$ est vraie. C'est évident.
- Pas de récurrence: montrons que pour tout n de \mathbb{N}^* l'implication : $P(n) \Rightarrow P(n+1)$
 Notre hypothèse est $P(n)$, c'est-à-dire: $A^n = A$.
 Calculons A^{n+1} . $A^{n+1} = AA^n$ qui s'écrit AA d'après l'hypothèse de récurrence. Mais $AA = A$ par calcul direct. Ainsi $A^{n+1} = A$, ce qui est l'expression de $P(n+1)$.

c) :On note $Q(n)$ la propriété suivante:

$$Q(n) : \text{ si } n \text{ est impair } B^n = B; \quad ; \text{ si } n \text{ est pair } B^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Base: montrons que $Q(1)$ est vraie. On sait que $B^1 = B$. Comme $n = 1$, n est impair donc $B^1 = B$ est la traduction de $Q(1)$.
- Pas de récurrence: montrons que pour tout n de \mathbb{N}^* l'implication : $Q(n) \Rightarrow Q(n+1)$
 Notre hypothèse est $Q(n)$. Prouvons la propriété $Q(n+1)$. De deux choses l'une:

- si $n+1$ est impair, alors n est pair. Nous appliquons l'hypothèse $Q(n)$ donc $B^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
 Par calcul élémentaire, déterminons B^{n+1} . Par définition $B^{n+1} = BB^n$, qui s'écrit donc via $Q(n)$:

$$B^{n+1} = B \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

donc finalement :

$$B^{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = B$$

ce qui est la traduction de $Q(n+1)$ lorsque $n+1$ est impair.

- si $n+1$ est pair, alors n est impair donc en appliquant $Q(n)$ il vient : $B^n = B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
 Comme antérieurement on calcule $B^{n+1} = BB^n$, soit:

$$B^{n+1} = B \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ce qui est la traduction de $Q(n+1)$ lorsque $n+1$ est pair.

- Bilan: partant de $Q(n)$ nous avons prouvé $Q(n+1)$ dans tous les cas.
 Remarque: il peut paraître étrange que nous n'amorcions la preuve ici qu'en $n = 1$ sans nous occuper de $n = 2$ pour amorcer. On voit qu'en fait le pas de récurrence pour $n = 1$, n'est autre que le passage de $Q(1)$ à $Q(2)$, ce qui rend inutile la preuve à part de $Q(2)$.

d) $(xA)^n = x^n A^n$ dont on sait grâce à la preuve antérieure relative à A^n que finalement : $(xA)^n = x^n A$ soit encore:

$$(xA)^n = \begin{pmatrix} x^n & 0 \\ x^n & 0 \end{pmatrix}.$$

. On applique de même la propriété relative à B . Il vient:

$$\text{si } n \text{ est impair } (yB)^n = y^n B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y^n & -y^n \end{pmatrix}; \quad \text{si } n \text{ est pair } (yB)^n = y^n \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -y^n & y^n \end{pmatrix}.$$

1.2 On se propose d'étudier les puissances successives de $xA + yB$, pour des réels x et y quelconques.

a) Notons pour tout n de \mathbb{N}^* , $H(n)$ la propriété:

$$H(n) : (A + B)^n = A^n + B^n.$$

- La base $H(1)$ est évidemment vraie puisque $(A + B)^1 = A^1 + B^1$.
- Montrons que pour tout n de \mathbb{N}^* : $H(n) \Rightarrow H(n + 1)$.

On a pour hypothèse que

$$(A + B)^n = A^n + B^n.$$

Par suite on en déduit $(A + B)^{n+1}$ comme suit. $(A + B)^{n+1} = (A + B)(A + B)^n$ qui s'écrit, d'après l'hypothèse de récurrence:

$$(A + B)^{n+1} = (A + B)(A^n + B^n)$$

qui s'écrit par distributivité et associativité du produit matriciel:

$$(A + B)^{n+1} = AA^n + AB^n + BA^n + BB^n = A^{n+1} + (AB)B^{n-1} + (BA)A^{n-1} + B^{n+1}$$

soit finalement, puisque nous avons montré que les produits AB et BA sont nuls:

$$(A + B)^{n+1} = A^{n+1} + B^{n+1}$$

qui n'est autre que la traduction de $H(n + 1)$.

Remarque: cette propriété dans l'ensemble des matrices carrées de côté 2 diffère de façon notable de celles valides dans les nombres réels. où

$$(3 + 5)^2 \neq 3^2 + 5^2.$$

b) Il vient évidemment de l'ensemble des résultats établis en amont:

$$(xA + yB)^n = x^n A + y^n B^n$$

Le dernier terme nous oblige à séparer le cas n pair du cas impair.

c) *Applications*

- On remarque que

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ x + y & -y \end{pmatrix}^{17} = (xA + yB)^{17} = x^{17} A + y^{17} B^{17}.$$

On sait puisque 17 est impair que $B^{17} = B$ donc finalement:

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ x + y & -y \end{pmatrix}^{17} = \begin{pmatrix} x^{17} & 0 \\ x^{17} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y^{17} & -y^{17} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{17} & 0 \\ x^{17} + y^{17} & -y^{17} \end{pmatrix}.$$

- De façon proche, sachant que 10 est pair, il vient, en choisissant $y = x$:

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 2x & -x \end{pmatrix}^{10} = (xA + xB)^{10} = x^{10}A + x^{10}B^{10}$$

soit

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 2x & -x \end{pmatrix}^{10} = \begin{pmatrix} x^{10} & 0 \\ x^{10} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -x^{10} & x^{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{10} & 0 \\ 0 & x^{10} \end{pmatrix},$$

qu'on peut écrire enfin:

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 2x & -x \end{pmatrix}^{10} = (xI)^{10}$$