Exercice 2 *Suites numériques*

On considère les fonctions g et F définies sur $[0,1]$ par:

$$g(x) = \frac{1}{2}x^2 \quad \text{et} \quad F(x) = g(x) - x.$$

2.1 *Résultats techniques*

a) On étudie les variations de g et de F sur $[0,1]$.

- Etude de g
  1. g est définie, continue, dérivable sur $[0,1]$ car polynôme.
  2. Variations
     On étudie le signe du nombre dérivé $g'(x) = x$. Il vient le tableau de variation suivant:

x	0		1
$g'(x)$		$+$	0
g	0	$\nearrow$	$1/2$

- Etude de F
  3. F est définie, continue, dérivable sur $[0,1]$ car polynôme.
  4. Variations
     On étudie le signe du nombre dérivé $F'(x) = x - 1$. Il vient le tableau de variation suivant:

x	0		1
$F'(x)$		$+$	0
F	-1	$\nearrow$	0

b) Les tableaux de variation précédents montrent que pour tout x de $[0,1]$, on a $g(x)$ compris entre 0 et 1/2 donc entre 0 et 1. De même on voit simplement que $F(x)$ est négative pour tout x de $[0,1]$, donc que l'inégalité demandée est vraie.

2.2 On considère la suite (x_n) définie par le choix d'un x_0 quelconque de $[0,1]$ et pour tout n de $\mathbb{N}$

$$x_{n+1} = g(x_n).$$

a) Comme x_0 est élément de $[0,1]$, alors $x_1 = g(x_0)$ existe et appartient à $[0,1]$ donc assure, de la même façon, l'existence du terme suivant, et ce pour tout n. De plus pour étudier la monotonie de (x_n), on considère pour un n quelconque le signe de

$$x_{n+1} - x_n = g(x_n) - x_n = F(x_n).$$

D'après l'étude des variations de F , comme x_n est élément de $[0,1]$, alors $x_{n+1} - x_n \leq 0$. Par conséquent la suite (x_n) est décroissante.

b) La suite (x_n) est décroissante et visiblement minorée par 0, donc elle est convergente, vers une limite que nous notons l.

Pour trouver l on raisonne par condition nécessaire: si (x_n) converge vers l, alors nécessairement l doit vérifier, vu que g est continue:

$$\lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} g(x_n) \quad \text{soit encore} \quad l = \frac{1}{2}l^2$$

qui constitue l'équation aux limites. Elle s'écrit : $l(2-l)=0$. Il existe deux candidats limites; nous devons en exclure un. Or $l=2$ ne peut convenir puisque les termes x_n restent dans $[0,1]$.(la décrissance de la suite aurait pu permettre de conclure aussi). Par conséquent, la suite étudiée converge vers le seul autre possible $l=0$.

Remarque: La suite (x_n) converge quel que soit le point de départ x_0 choisi dans l'intervalle $[0,1]$ vers 0; on dit que 0 est un point d'attraction pour la suite..