

Corrigé de l'examen médian du 17 novembre 2005

Correction de l'exercice 3.

1. (a) On applique la formule de Taylor Mac Laurin à l'ordre $2n + 1$ à la fonction cos à l'ordre $2n + 2$ à la fonction sin :

$$\begin{cases} \cos x = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{\cos^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{\cos^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}, \\ \sin x = \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{\sin^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{\cos^{(2n+3)}(\xi')}{(2n+3)!}, \end{cases} \quad (1)$$

où ξ et ξ' appartiennent à $]0, x[$ (ou $]x, 0[$). En zéro, les dérivées d'ordre pair de la fonction cosinus valent ± 1 et ses dérivées d'ordre impair sont nulles. De même, en zéro, les dérivées d'ordre impair de la fonction sinus valent ± 1 et ses dérivées d'ordre pair sont nulles. Les dérivées des fonctions sinus et cosinus sont majorées par un. On en déduit donc les formules usuelles : pour tout entier n et pour tout réel x

$$\begin{cases} \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_n^c, \\ \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_n^s, \end{cases} \quad (2)$$

où

$$\boxed{R_n^c \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}, \quad R_n^s \leq \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}.} \quad (3)$$

Remarque 1. On peut aussi démontrer les majorations des restes (3) en écrivant que les fonctions sinus et cosinus sont développables en série entière, qu'elles constituent des séries alternées et que le reste est inférieur en valeur absolue au premier terme négligé.

- (b) On note désormais

$$\begin{cases} C_n(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \\ S_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \end{cases} \quad (4)$$

Selon (3), on a

$$\boxed{|\cos x - C_n(x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}, \quad |\sin x - S_n(x)| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}} \quad (5)$$

ce qui signifie que, pour tout n et pour tout x , $C_n(x)$ et $S_n(x)$ constituent des approximations de $\cos x$ et de $\sin x$ avec une erreur respectivement inférieure à $(|x|^{2n+2})/(2n+2)!$ et $(|x|^{2n+3})/(2n+3)!$.

2. On suppose dans toute cette question que $x = 10^{-3}$.

(a) En partant de $n = 0$, on essaye différentes valeurs de n de façon à obtenir

$$\frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \leq 10^{-9}, \quad \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!} \leq 10^{-9} \quad (6)$$

On obtient

$$\boxed{n_1 = 1.} \quad (7)$$

(b) Pour $n = n_1 = 1$, on a

$$\begin{cases} C_n(x) = 1 - \frac{x^2}{2}, \\ S_n(x) = x - \frac{x^3}{3!}. \end{cases} \quad (8)$$

On obtient numériquement pour $x = 10^{-3}$

$$C_n(x) = 9.999995000000000 \times 10^{-1}, \quad (9)$$

$$\cos x = 9.999995000000417 \times 10^{-1}, \quad (10)$$

$$|\cos x - C_n(x)| = 4.1633 \times 10^{-14}, \quad (11)$$

$$S_n(x) = 9.999998333333334 \times 10^{-4}, \quad (12)$$

$$\sin x = 9.999998333333417 \times 10^{-4}, \quad (13)$$

$$|\sin x - S_n(x)| = 8.2399 \times 10^{-18}. \quad (14)$$

Ces calculs ont été réalisés sous matlab.

On pourra utiliser le script fourni `calculloc`. Voir aussi les fonctions matlab (qui sont appelées par `calculloc`), `determinnloc`, `approxncos`, `approxnsin`, `dlnccos` et `dlnccos`.

Les égalités (11) et (14) nous confirment que l'erreur commise est bien inférieure à 10^{-9} .

3. On suppose dans toute cette question que $x \in [0, \pi/4]$.

(a) Puisque $|x| \leq \pi/4$, les inégalités

$$\frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \leq \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n+2} \frac{1}{(2n+2)!}, \quad \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!} \leq \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n+2} \frac{1}{(2n+2)!}.$$

sont vraies si les inégalités suivantes sont vraies :

$$\frac{1}{(2n+2)!} \leq \frac{1}{(2n+2)!}, \quad \frac{|x|}{(2n+3)!} \leq \frac{1}{(2n+2)!}.$$

La seconde inégalité est équivalente à

$$|x| \leq 2n + 3,$$

ce qui est vrai puisque $|x| \leq \pi/4 \leq 3 \leq 2n + 3$. On a donc, pour tout $x \in [0, \pi/4]$,

$$\frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \leq \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n+2} \frac{1}{(2n+2)!}, \quad (15a)$$

$$\frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!} \leq \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n+2} \frac{1}{(2n+2)!}. \quad (15b)$$

(b) On vérifie numériquement que pour $n_2 = 5$, on a

$$\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n_2+2} \frac{1}{(2n_2+2)!} \leq 10^{-9}.$$

Grâce à (2), (3) et (15), on a donc pour $n = n_2 = 5$, pour tout $x \in [0, \pi/4]$

$$\begin{cases} |\cos x - C_n(x)| \leq 10^{-9}, \\ |\sin x - S_n(x)| \leq 10^{-9}. \end{cases} \quad (16)$$

(c) Pour $n = n_2 = 5$, on a

$$\begin{cases} C_n(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!}, \\ S_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!}. \end{cases} \quad (17)$$

x	$ \cos x - C_n(x) $	$ \sin x - S_n(x) $
10^{-3}	0	0
$\pi/7$	1.3922×10^{-13}	4.8294×10^{-15}
$\pi/4$	1.1462×10^{-10}	6.9280×10^{-12}

TAB. 1 – Les erreurs et pour $n = n_2 = 5$ et $x \in \{10^{-3}, \pi/7, \pi/4\}$.

Dans le tableau 1 ont été indiquées les erreurs $|\cos x - C_n(x)|$ et $|\sin x - S_n(x)|$ pour $x \in \{10^{-3}, \pi/7, \pi/4\}$ (calculs réalisés sous matlab).

On pourra utiliser le script fourni `calculglob`. Voir aussi les fonctions matlab (qui sont appelées par `calculglob`), `determinnglob`, `approxncos`, `approxnsin`, `dlnccos` et `dlnccos`.

Ces erreurs sont bien inférieures à 10^{-9} ; on constate aussi que, plus x est petit, plus l'erreur est petite.

On peut s'intéresser au tracé des fonctions qui, pour n fixé, associé à $x \in [0, \pi/4]$ les valeurs $|\cos x - C_n(x)|$ et $|\sin x - S_n(x)|$.

Voir figures 1. Sur ces figures, on a choisi n de façon que l'erreur soit majorée par $\varepsilon > 0$.

On a plutôt l'habitude de tracer le logarithme en base 10 de cette erreur, ce qui permet de «dilater» l'échelle. Voir les figures 2, où on a choisi n de façon que l'erreur soit majorée par

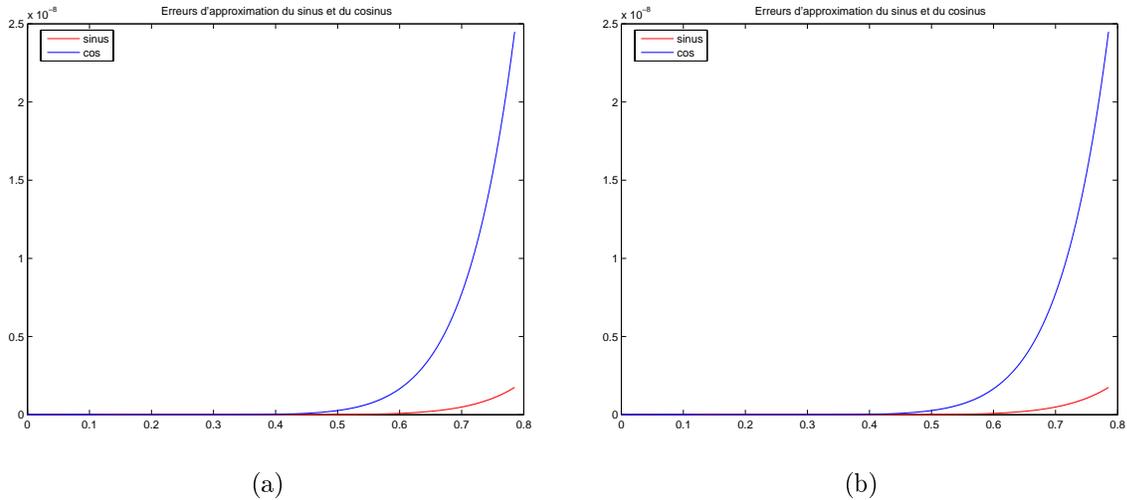


FIG. 1 – les courbes $|\cos x - C_n(x)|$ et $|\sin x - S_n(x)|$ sur $[0, \pi/4]$ n étant choisi de telle sorte que l'erreur soit majorée par $\varepsilon = 10^{-3}$ (figure (a)) et $\varepsilon = 10^{-6}$ (figure (b)).

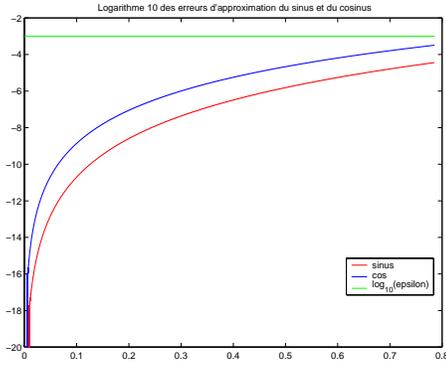
$\varepsilon > 0$ (Voir aussi tableau 2). On constate que l'erreur ne descend pas en deçà de 10^{-16} , qui correspond au zéro machine (sous matlab).

On pourra aussi consulter la fonction qui a fournit ce graphe (`tracelogerreursincos`) ainsi que la valeur de n correspondant à la valeur de ε (donné dans le tableau 2).

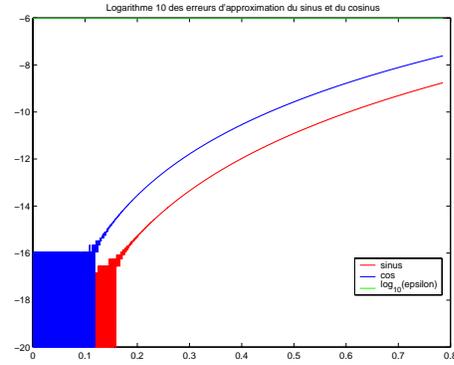
ε	n
10^{-3}	2
10^{-6}	4
10^{-9}	5
10^{-12}	6
10^{-16}	8

TAB. 2 – Valeurs des entiers n qui permettent une erreur inférieure à ε sur $[0, \pi/4]$.

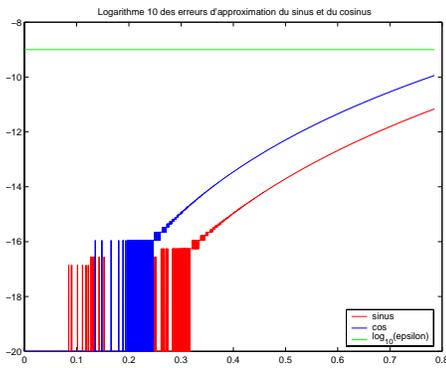
- (d) Dans la question 2, nous avons choisi n pour que $C_n(x)$ et $S_n(x)$ fournissent des approximations de $\cos x$ et $\sin x$ à x fixé. Nous constatons que $n = 1$ suffisait (pour une erreur majorée par 10^{-9}). En revanche dans la question 3, pour la même précision, il fallait prendre $n = 5$, plus élevé. Cela s'explique par le fait que dans le second cas, la majoration est valable pour tout élément x de $[0, \pi/4]$ (on parle de majoration uniforme) et donc plus stricte. De façon numérique, dans le premier cas, le fait que x soit «très petit» explique la petite valeur de n : dans le reste $|x|^{2n+2}/((2n+2)!)$ et $|x|^{2n+3}/((2n+3)!)$, quand n grandit, $|x|^{2n+2}$ et $|x|^{2n+3}$ tend très vite vers zéro. En revanche, dans le second cas, le reste $|x|^{2n+2}/((2n+2)!)$ est remplacé par $(\pi/4)^{2n+2}/((2n+2)!)$ et $(\pi/4)^{2n+2}$ tend vers zéro moins vite que $|x|^{2n+2}$.



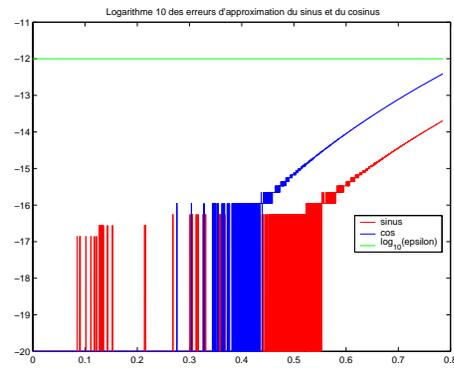
(a)



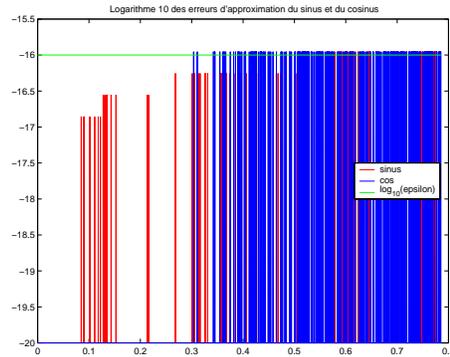
(b)



(c)



(d)



(e)

FIG. 2 – les courbes $\log_{10} (|\cos x - C_n(x)|)$ et $\log_{10} (|\sin x - S_n(x)|)$ sur $[0, \pi/4]$ n étant choisi de telle sorte que l'erreur soit majorée par $\varepsilon = 10^{-3}$ (figure (a)), $\varepsilon = 10^{-6}$ (figure (b)), $\varepsilon = 10^{-9}$ (figure (c)), $\varepsilon = 10^{-12}$ (figure (d)) et $\varepsilon = 10^{-16}$ (figure (e)).

4. (a) La majoration d'erreur proposée en question 3 n'est valable que pour $x \in [0, \pi/4]$. Si x appartient à \mathbb{R} , les propriétés de périodicité et de symétrie permettent de ramener le calcul au calcul du sinus et du cosinus sur $[0, \pi/4]$:
- si $x \in \mathbb{R}$, on ramène, par périodicité, au calcul sur $[0, 2\pi[$ (voir ensuite cas suivant) ;
 - si $x \in [\pi, 2\pi[$, on ramène, par symétrie autour de π , au calcul de sur $[0, \pi[$ (voir ensuite cas suivant) ; si $x \in [0, \pi[$, voir cas suivant ;
 - si $x \in [\pi/2, \pi[$, on ramène, par symétrie autour de $\pi/2$, au calcul de sur $[0, \pi/2[$ (voir ensuite cas suivant) ; si $x \in [0, \pi/2[$, voir cas suivant ;
 - si $x \in [\pi/4, \pi/2[$, on ramène, par symétrie autour de $\pi/4$, au calcul de sur $[0, \pi/4[$ et c'est fini ! si $x \in [0, \pi/4[$, c'est fini !
- (b)

x	$ \cos x - C_n(x) $	$ \sin x - S_n(x) $
$\pi/3$	8.8506×10^{-13}	3.5693×10^{-14}
3.2	1.2490×10^{-16}	0
6	2.2204×10^{-16}	5.5511×10^{-16}

TAB. 3 – Les erreurs $|\sin x - S_n(x)|$ et $|\cos x - C_n(x)|$ pour $n = n_2 = 5$ et $x \in \{\pi/3, 3.2, 6\}$.

Dans le tableau 3 ont été indiquées les erreurs $|\cos x - C_n(x)|$ et $|\sin x - S_n(x)|$ pour $x \in \{\pi/3, 3.2, 6\}$ (calculs réalisés sous matlab).

Ces erreurs sont bien inférieures à 10^{-9} .

On laisse vérifier au lecteur, que si on ne prend pas la précaution de se ramener à l'intervalle $[0, \pi/4]$, les approximations proposées ne satisfont plus une erreur inférieure à 10^{-9} .