

TRAVAUX DIRIGÉS DE l'UV MT31

MATHÉMATIQUES : APPLICATIONS

Automne 2004

Jérôme BASTIEN et Dominique CHAMORET

Document compilé le 15 mars 2005

Liste des Travaux Dirigés

Travaux Dirigés 0. Jouons avec les mathématiques	3
Travaux Dirigés 1. Dérivées	11
Travaux Dirigés 2. Analyse vectorielle	13
2.1. Différentielles	13
2.2. Le gradient	14
2.3. Le rotationnel	15
2.4. Expressions des opérateurs dans d'autres systèmes de coordonnées	17
Travaux Dirigés 3. Systèmes linéaires et matrices	19
3.1. Produit matriciel	19
3.2. Résolution de systèmes	19
3.3. Inversibilité de matrices	20
3.4. Application : étude de treillis	20
3.5. Application : géométrie plane	21
Travaux Dirigés 4. Intégrales multiples	23
4.1. Révisions : calculs d'intégrales simples	23
4.2. Calculs d'intégrales doubles	24
4.3. Calculs d'intégrales triples	24
4.4. Calculs d'aires et de volumes	24
4.5. Applications	25
Travaux Dirigés 5. Intégrales curvilignes et surfaciques	29
Travaux Dirigés 6. Applications des différentielles : calculs d'incertitudes	31
6.1. Calculs d'incertitudes	31
6.2. Étude d'extremums	32
6.3. Applications à la résistance des matériaux	32
Travaux Dirigés 7. Équations différentielles	35
7.1. Équations différentielles à coefficients constants d'ordre un	35
7.2. Équations différentielles à coefficients constants d'ordre deux	35
7.3. Applications à la mécanique	36
7.4. Pour chercher	37
Travaux Dirigés 8. Diagonalisation et applications	39
8.1. Diagonalisation	39

8.2. Application à la résolution de systèmes différentiels	39
Annexe A. Quelques éléments de corrections des exercices du TD 0	41
Bibliographie	47

Jouons avec les mathématiques

Les mathématiques peuvent être aussi ludiques. Vous trouverez dans ce chapitre quelques exercices, qui ne seront pas traités¹ en TD. Ces exercices n'exigent presque aucun bagage scientifique en mathématiques. J'espère que vous aurez du plaisir à traiter ces exercices. Des éléments de corrections sont fournis en annexe A.

L'exercice 0.1 est extrait de [BM03]. L'exercice 0.2 provient de l'IUFM². Les exercices³ 0.5, 0.10 et 0.14 sont extraits de *Voulez-vous jouer avec les maths ?*, de Gilles Dowek (voir [Dow02]). Dans cet ouvrage, on trouvera d'autres exercices avec leur solution complète et d'intéressants développements. Il fait partie de la collection Les Petites Pommes du Savoir⁴.

EXERCICE 0.1.

On sait que le nombre à virgule $0.3333\dots$, écrit en base 10, est égal à $1/3$. Une façon de le déterminer est d'écrire successivement

$$\begin{aligned}x &= 0.3333\dots, \\10x &= 3.3333,\end{aligned}$$

et d'en déduire par soustraction $9x = 3$ donc $x = 1/3$.

1. Montrer de la même façon que $0.9999\dots = 1$.
2. De la même façon, trouver une fraction égale à $0.123123123123\dots$ (où 123 se répète de façon périodique).

EXERCICE 0.2 (Un peu de vin ?).

On dispose d'une jarre de vin et d'une jarre d'eau. On prend un verre de vin dans la jarre de vin et on le verse dans la jarre d'eau. Puis on prend un verre du mélange obtenu et on le verse dans la jarre de vin (le verre est le même pour les deux opérations).

Parmi ces quatre affirmations, laquelle vous paraît juste ?

1. Il y a plus de vin dans la jarre d'eau que d'eau dans la jarre de vin ;
2. il y a plus d'eau dans la jarre de vin que de vin dans la jarre d'eau ;
3. Il y a autant de vin dans la jarre d'eau que d'eau dans la jarre de vin ;

¹sauf demande explicite de votre part.

²Les Instituts Universitaires de Formation des Maîtres sont censés inculquer aux jeunes enseignants les bases de la pédagogie. En fait, cette pédagogie n'est pas toujours adaptée aux classes difficiles qui attendent parfois ces jeunes enseignants. De plus, Ces IUFM sont aussi dans la ligne de mire de la Cours des Comptes, leur coûts étant trop importants ...

³J'en remercie l'auteur, Gilles Dowek, de m'avoir autorisé à les reproduire.

⁴qui publie régulièrement des petits ouvrages de vulgarisation scientifique, très bien faits. On pourra consulter par exemple [Ali02, Bou02, Kle02, Las02].

4. la réponse dépend des volumes des jarres, du volume du verre utilisé ou de l'homogénéité du mélange d'eau et de vin.

EXERCICE 0.3 (Une mouche et un train).

Deux villes A et B se trouvent à 100 km. l'une de l'autre. Un train part de A pour aller à B . Au même moment, une mouche part de B pour aller à A . On supposera que la vitesse (constante) du train est de 100 km./h. et que celle de la mouche est de 200 km./h..

Quand la mouche rencontre le train, elle fait instantanément demi-tour et se redirige vers B . Arrivée à B , elle fait instantanément demi-tour et se redirige vers A . Et ainsi de suite ...

1. Quand le train a fini son voyage⁵, quelle distance aura parcouru la mouche ?
2. Quel est le nombre d'allers et retours parcourus par la mouche ?

Quand vous aurez traité l'exercice 0.3, vous pourrez traiter plus facilement l'exercice suivant :

EXERCICE 0.4 (Le paradoxe d'Achille et la tortue).

Trouvez la solution du paradoxe suivant :

Achille court à 10 km./h. et la tortue marche à 1 km./h. Ils font une course et, puisque Achille court plus vite que la tortue, il lui laisse 10 m. d'avance. Pendant qu'il parcourt ces 10 m., la tortue, dix fois plus lente, parcourt 1m. Il reste donc 1 m. entre Achille et la tortue. Pendant qu'il parcourt ce mètre, la tortue parcourt 10 cm. Il reste donc 10 cm. entre Achille et la tortue. Puis, avec le même raisonnement, il restera, entre Achille et la tortue, 1 cm, puis 0.1 cm, puis 0.01 cm.... La distance entre Achille et la tortue sera de plus en plus petite mais non nulle et Achille ne rattrapera donc jamais la tortue !!

EXERCICE 0.5 (La périodicité des marées).

La lune attire l'eau présente sur terre qui prend la forme d'un ovale autour de la terre, comme le montre la figure 0.1.

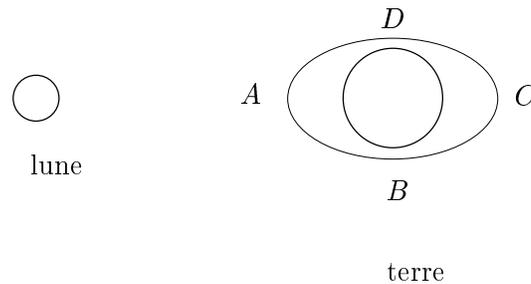


FIG. 0.1 – L'ovale formé par le bourrelet d'eau autour de la terre.

Comme la terre tourne, la plage qui était ce matin en A – marée haute – est maintenant en B – marée basse – et elle sera ce soir en C – marée haute à nouveau – puis en D – marée basse encore – cette nuit. Cela explique que le même scénario, avec deux marées hautes et deux marées basses, se reproduise jour après jour. Pourtant, on observe un décalage de l'heure de la marée. Cela est dû au fait que la terre tourne autour de la lune. Pendant que la terre fait un tour sur elle-même, la lune avance un peu

⁵et que la mouche se trouve donc écrasée entre le train et A .

sur son orbite et il faut un peu plus de temps à la terre pour se retrouver dans la même configuration par rapport à son satellite (voir figure 0.2).

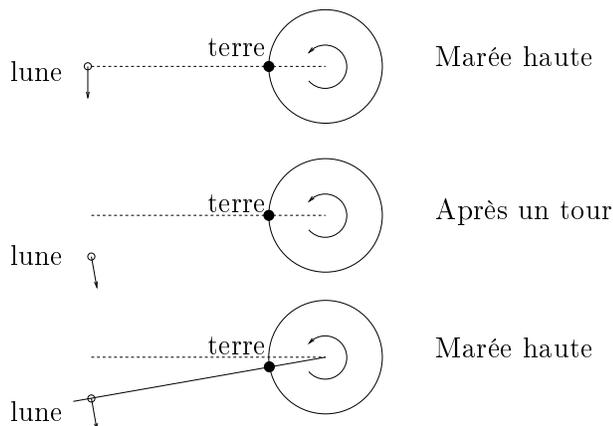


FIG. 0.2 – passage d'une marée haute à l'autre.

On rappelle que : la terre fait un tour sur elle-même en $T_1 = 0,997270$ jours et que la lune tourne autour de la terre en $T_2 = 27,3217$ jours.

De combien de minutes, la marée se décale-t-elle chaque jour ?

Dans la même logique que l'exercice 0.5, on donne l'exercice suivant :

EXERCICE 0.6.

On regarde une montre à aiguilles.

1. Quels sont les différents instants de la journée où la grande et la petite aiguilles sont superposées ?
2. Est-il possible que la grande aiguille, la petite aiguille et la troteuse soient superposées ?
3. Quels sont les différents instants de la journée où la grande et la petite aiguilles sont perpendiculaires ?
4. Quels sont les différents instants de la journée où la grande et la petite aiguilles sont opposées ?

EXERCICE 0.7 (La droite d'Euler).

Soit ABC un triangle quelconque (non aplati). On note O le centre du cercle circonscrit, G le centre de gravité et H l'orthocentre.

Les trois points O , G et H sont alignés ; la droite qu'ils définissent est appelée la droite d'Euler.

On propose deux démonstrations différentes de ce résultat. Plus précisément, on montre que

$$\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO}. \quad (0.1)$$

1. Première méthode.

On note A' le milieu de $[BC]$, d_1 , la médiatrice de $[BC]$ et d'_1 , la hauteur issue de A . On considère \mathcal{H} l'homothétie de centre G et de rapport -2 .

- (a) Montrer que $\mathcal{H}(A') = A$, puis que $\mathcal{H}(d_1) = d'_1$.

- (b) On note d_2, d'_2, d_3 et d'_3 les médiatrices et les hauteurs relatives aux cotés $[AC]$ et $[AB]$.
Montrer que

$$\mathcal{H}(d_1 \cap d_2 \cap d_3) = d'_1 \cap d'_2 \cap d'_3,$$

et conclure.

2. Seconde méthode.

On note A' le milieu de $[BC]$ et on pose

$$\vec{u} = \overrightarrow{OH} - 3\overrightarrow{OG}.$$

- (a) Montrer que

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO}) \cdot \overrightarrow{BC},$$

puis que

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{BC} = 0.$$

- (b) Montrer, de même, que $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB}$ est nul.

- (c) Conclure

EXERCICE 0.8 (Une démonstration du théorème de Pythagore).

1. On se donne un carré de côté 2. Comment tracer simplement un autre carré de surface moitié de celle du carré initial ?
2. Dédire de la construction que l'hypoténuse d'un triangle rectangle isocèle dont les petits côtés valent 1, est égale à $\sqrt{2}$.
3. On considère le grand carré de la figure 0.3. Chacun des petits triangles est rectangle, ses petits côtés valent a et b , son hypoténuse est c . En calculant de deux façons différentes l'aire du grand carré, démontrer que $a^2 + b^2 = c^2$.

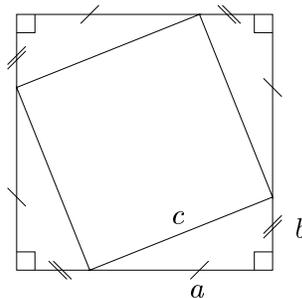


FIG. 0.3 - .

EXERCICE 0.9 (L'irrationalité de $\sqrt{2}$).

On montre dans cet exercice, par l'absurde que $\sqrt{2}$ est irrationnel, c'est-à-dire qu'il n'est pas de la forme p/q où p et q sont deux entiers. On raisonne par l'absurde. On suppose donc qu'il existe $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tel que

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}. \quad (0.2)$$

On peut supposer que cette fraction est simplifiée, c'est-à-dire que p et q n'ont pas de diviseurs communs.

1. Grâce à (0.2), montrer que p^2 est pair, puis que p est pair.
2. En déduire que q^2 est pair, puis que q est pair.
3. En conclure que (0.2) est absurde.

EXERCICE 0.10.

Un morceau de tissu est constitué de deux carrés de tissus de côté respectifs 2 m. et 6 m. et cousus ensemble comme l'indique la figure 0.4.

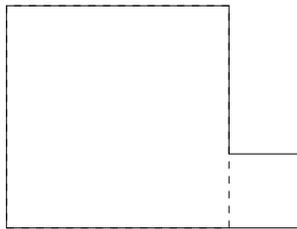


FIG. 0.4 – un morceau de tissu.

La surface totale de cette pièce de tissu est donc $S = 2^2 + 6^2 = 40 \text{ m}^2$.

Comment peut-on obtenir un carré de tissu de même surface, en découpant deux triangles dans la pièce de la figure 0.4 et en recousant les trois morceaux différemment ?

EXERCICE 0.11 (Un paradoxe sur les surfaces).

Sur la figure 0.5, se trouvent figures constituées de polygones. Un simple réarrangement de ces polygones fait apparaître un carré dans la figure du bas. D'où vient-il ?

EXERCICE 0.12 (La paradoxe de la boîte de crayons de couleur).

On présente dans cet exercice, un raisonnement par récurrence⁶ ; soit il est vrai et vous en parlez à votre libraire préféré, soit il est faux et vous en trouvez la faille !

Ici, on démontre que pour toute boîte de crayon, non vide, tous les crayons sont de la même couleur. On note donc, pour $n \geq 1$, la proposition \mathcal{P}_n : «Tous les crayons d'une boîte quelconque à n crayons sont de la même couleur.»

⁶dont on rappelle brièvement le principe : soit à démontrer une proposition \mathcal{P}_n pour tout entier supérieur à un entier n_0 . On démontre d'abord l'initialisation, c'est à dire que \mathcal{P}_{n_0} est vraie. On démontre ensuite le pas, c'est-à-dire, on démontre que, pour tout entier n supérieur ou égal à n_0 , \mathcal{P}_n entraîne \mathcal{P}_{n+1} . C'est-à-dire encore : on se donne n fixé. On suppose que \mathcal{P}_n (l'hypothèse de récurrence) est vraie et on démontre que \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

Quand ces deux étapes sont faites, on peut affirmer que pour tout entier supérieur n_0 , \mathcal{P}_n est vraie.

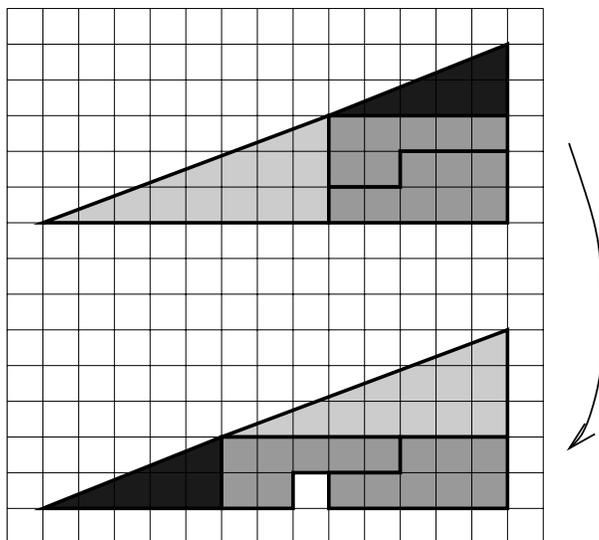


FIG. 0.5 – Deux figures avec la même surface ?

Ici, on initialise à $n_0 = 1$. La preuve de \mathcal{P}_1 est évidente : Tous les crayons d'une boîte à 1 crayon sont de la même couleur.

On se donne $n \geq 1$. On suppose que \mathcal{P}_n est vraie et on démontre \mathcal{P}_{n+1} . Soit donc une boîte à $n + 1$ crayons. On considère tout d'abord la première sous-boîte formée des n premiers crayons. D'après l'hypothèse de récurrence, ils sont de la même couleur. On considère ensuite la deuxième sous-boîte formée des n derniers crayons. D'après l'hypothèse de récurrence, ils sont de la même couleur. Les deux sous-boîtes ont un crayon en commun, qui est de la couleur des crayons de chacune des deux sous-boîtes ; les deux sous-boîtes sont donc de la même couleur et donc, pour notre boîte à $n + 1$ crayons, tous les crayons sont de la même couleur et \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

Ainsi, pour tout $n \geq 1$, \mathcal{P}_n est vraie !

EXERCICE 0.13 (Un autre paradoxe sur les crayons de couleur).

Dans le même esprit que l'exercice 0.12, on peut aussi démontrer que tous les crayons d'une boîte de couleur sont bleus : le passage de \mathcal{P}_n à \mathcal{P}_{n+1} est évident.

EXERCICE 0.14.

Un mathématicien place des oranges dans une boîte en plastique comme l'indique la figure 0.6 page ci-contre et remplit l'espace libre avec de l'eau.

On rappelle que le volume d'une sphère de rayon R est $V = 4\pi R^3/3$.

1. En volume, a-t-il pris plus d'eau ou plus d'orange ?
2. Pour mettre plus d'orange et moins d'eau dans la boîte, une possibilité est de disposer les rangées d'oranges en quinconce : après avoir disposé la première rangée, on décale la deuxième de manière à pouvoir les tasser un peu plus (voir figure 0.7 page suivante).

Calculer alors le pourcentage du volume d'orange par rapport au volume total.

3. On peut encore faire mieux, en disposant la deuxième couche d'orange ainsi : chaque orange de la deuxième couche se trouve à l'aplomb du centre d'un triangle équilatéral formé de trois

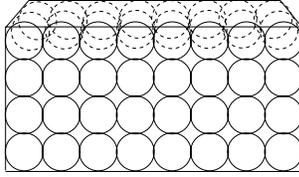


FIG. 0.6 – un carton pour orangeade.

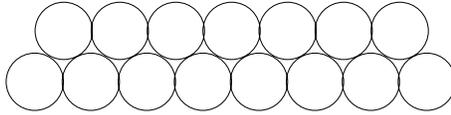


FIG. 0.7 – un carton pour orangeade plus tassée.

orange de la première couche. Calculer alors le pourcentage du volume d'orange par rapport au volume total.

TRAVAUX DIRIGÉS 1

Dérivées

EXERCICE 1.1. Calculer les dérivées des fonctions suivantes (sur leur ensemble de définition) :

- a) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$, b) $f(x) = \tan(2x^2)$,
c) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$, d) $f(x) = \cos^3(x) \sin^2(x)$,
e) $f(x) = x^2(1+x)^n$ où $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 1.2. Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n -ième des fonctions suivantes :

- a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto (x^3 + 2x - 7)e^x$ $x \mapsto e^x \cos(x)$

Cet exercice sera aussi traité en TP : voir la section 2.2 du TP 2.

EXERCICE 1.3.

Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$ (non simultanément nuls), $x_0 \in \mathbb{R}$, f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie au voisinage de x_0 et dérivable en x_0 .

1. Démontrer que

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x_0 + bh) - f(x_0 - ah)}{(b+a)h} = f'(x_0). \quad (1.1)$$

2. Que retrouve-t-on si on fait $a = 0$ et $b = 1$ dans (2.6) ?
3. Que trouve-t-on si on fait $a = 1$ et $b = 1$ dans (2.6) ?
4. Dans cette question, on suppose que $f(x) = e^x$ et que $x_0 = 1$. Comparer la valeur exacte de $f'(x_0)$ à ses approximations données par

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + bh) - f(x_0 - ah)}{(b+a)h}, \quad (1.2)$$

pour $h = 0,01$, $a = 0$ et $b = 1$ puis $a = 1$ et $b = 1$. Commentez !

Cet exercice sera aussi traité en TP : voir la section 2.2 du TP 2.

EXERCICE FACULTATIF 1.4. On rappelle la définition de la fonction caractéristique $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ de \mathbb{Q} :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Soit la fonction g de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = x^2 \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x).$$

Montrer que g est dérivable en zéro seulement.

TRAVAUX DIRIGÉS 2

Analyse vectorielle

2.1. Différentielles

EXERCICE 2.1.

Dans chacun des cas suivants, on donne $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Donner les dérivées partielles d'ordre un de l'application f ainsi que sa différentielle en $a = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

a) $n = 3$ et $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$;

b) $n = 2$ et $f(x_1, x_2) = \cos(x_1) + \sin(x_2)$;

c) $n = 1$ et $f(x_1) = \text{Arc tan}(x_1)$;

d) $n \in \mathbb{N}^*$ et $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^2$.

e) $n = 2$ et $f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 + x_1 x_2}{x_2^3}$.

EXERCICE FACULTATIF 2.2.

On considère la fonction f définie dans la question e) de l'exercice 2.1.

1. Calculer numériquement en $X = (1, 1)$ et $X' = (100, 100)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1),$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(100, 100) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(100, 100).$$

2. On pose $h_1 = 0,001$ et $h_2 = 0,003$. Calculer numériquement :

$$df(1, 1).(h_1, h_2) \text{ et } df(100, 100).(h_1, h_2).$$

3. Calculer numériquement

$$f(1, 1),$$
$$f(1 + h_1, 1 + h_2),$$
$$f(100, 100),$$
$$f(100 + h_1, 100 + h_2).$$

4. Comparer

$$f(1 + h_1, 1 + h_2) \text{ et } f(1, 1) + df(1, 1).(h_1, h_2),$$

$$f(100 + h_1, 100 + h_2) \text{ et } f(100, 100) + df(100, 100).(h_1, h_2).$$

5. Commentez !

2.2. Le gradient

EXERCICE 2.3. Soient n un entier naturel et f et g deux fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} . Démontrer les égalités du cours suivantes :

$$\begin{aligned} \text{grad}(f + g)(x) &= \text{grad} f(x) + \text{grad} g(x), \\ \text{grad}(\alpha f)(x) &= \alpha \text{grad} f(x), \quad (\alpha \in \mathbb{R}), \\ \text{grad}(fg)(x) &= f(x)\text{grad} g(x) + g(x)\text{grad} f(x). \end{aligned}$$

EXERCICE 2.4 (Un peu de topographie). On donne sur la figure 2.1 quelques lignes de niveau issues d'une carte topographique.

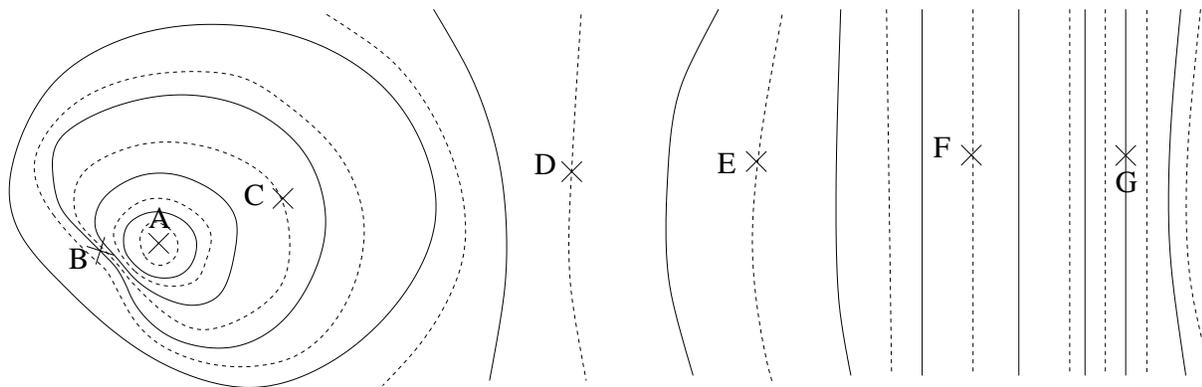


FIG. 2.1 – Quelques courbes de niveau

On supposera que A est le plus haut point (altitude 1235 m.) et que le terrain «descent vers la droite» de la carte. De plus, entre deux lignes de niveau différentes (une pleine et une pointillée), on supposera qu'il y a une différence d'altitude $\delta_1 = 5$ m et qu'entre deux lignes de niveau du même type (pleine ou pointillée), il y a une différence d'altitude $\delta_2 = 10$ m. L'échelle est de 1 cm. sur la carte pour 10 m. sur le terrain.

Nous considérons que ces lignes de niveau représentent les isovaleurs de la fonction $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ qui à chaque point (x, y) du plan associe $z = g(x, y)$, la hauteur en ce point.

1. Tracer en B, C, \dots, G la direction et le sens du gradient de g .
2. En utilisant les résultats du cours, comment peut-on définir le gradient approché en ces points (on utilisera les deux réseaux d'équipotentiels définis par δ_2 puis δ_1) ?
3. En déduire que la pente (approchée) est la plus forte là où les lignes de niveau se resserrent.

4. (a) En utilisant les questions précédentes, Tracer en B, C, \dots, G le gradient approché de g . (on utilisera les deux réseaux d'équipotentiels définis par δ_2 puis δ_1).
- (b) Le résultat annoncé en question 3 est-il vérifié ?
- (c) Que remarquez-vous au point G ?
5. Que se passe-t-il si on donne des lignes de niveau séparées par des différences d'altitude de plus en plus faibles ? Est-ce raisonnable ?
6. Peut-on calculer le gradient en A ? Que pensez-vous de sa valeur ?
7. Que se passe-t-il sur le gradient approché si le terrain est «presque plat» ? Que se passe-t-il sur le gradient approché si le terrain rigoureusement plat ?
8. Que se passe-t-il pour les gradients précédemment calculés si on suppose que le point D est le point le plus bas de la carte ?
9. Essayez d'imaginer les allures des cartes représentant le sommet du ballon d'Alsace et du pic du midi. Quelle serait l'allure de la carte pour un sommet se trouvant dans une situation intermédiaire entre celle d'un sommet de type ballon et celle d'un sommet de type pic ?

EXERCICE 2.5. Soit f la fonction de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R} définie par

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2. \quad (2.1)$$

1. Calculer le gradient de f en tout point.
2. Quelles sont les isovaleurs de f dans l'espace ?
3. En un point M d'une sphère de centre l'origine, représenter le gradient de f et conclure.

2.3. Le rotationnel

EXERCICE 2.6 (Calcul d'un potentiel).

Soit le champ vectoriel V défini par

$$V(x, y, z) = \begin{pmatrix} V_1(x, y, z) \\ V_2(x, y, z) \\ V_3(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xyz^3 + \cos y \\ x^2z^3 - x \sin y + e^z \\ 3x^2yz^2 + ye^z \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

1. Calculer $\nabla \wedge V$. Que peut-on en déduire ?
2. Montrer que si ϕ est un champ scalaire vérifiant

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y, z) = V_1(x, y, z), \quad (2.3)$$

alors, il existe $\phi_1(y, z)$ tel que

$$\phi(x, y, z) = x^2yz^3 + x \cos y + \phi_1(y, z). \quad (2.4)$$

3. Montrer que, sous les notations précédentes, si

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y, z) = V_2(x, y, z), \quad (2.5)$$

alors, il existe $\phi_2(z)$ tel que

$$\phi_1(y, z) = ye^z + \phi_2(z). \quad (2.6)$$

4. Montrer que, sous les notations précédentes, si

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}(x, y, z) = V_3(x, y, z), \quad (2.7)$$

alors, il existe une constante C telle que

$$\phi_2(z) = C. \quad (2.8)$$

5. Dédurre des questions précédentes l'expression de $\phi(x, y, z)$ et vérifier que

$$V(x, y, z) = \nabla \phi(x, y, z). \quad (2.9)$$

EXERCICE FACULTATIF 2.7 (Un peu de mécanique des fluides).

On rappelle qu'un champ de vitesse v (par exemple en mécanique des fluides) est dit irrotationnel si :

$$\nabla \wedge v = 0. \quad (2.10)$$

1. Pourquoi existe-t-il un potentiel ϕ tel que

$$v = \nabla \phi. \quad (2.11)$$

REMARQUE 2.1. En mécanique des fluides, ϕ est appelé potentiel des vitesses.

2. Montrer que si v ne dépend que de deux variables (x, y) et que v se met sous la forme

$$v = \begin{pmatrix} V_1(x, y) \\ V_2(x, y) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

alors (2.10) et (2.11) se réécrivent : si

$$\frac{\partial V_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial V_1}{\partial y}(x, y) = 0, \quad (2.13)$$

alors, il existe $\phi(x, y)$ tel que

$$v(x, y) = \text{grad } \phi(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

3. En se rapportant à l'exercice 2.4, dans la situation de cet exercice, quel est l'analogie de la hauteur g et quel est l'analogie de $\text{grad } g$?

4. Retrouver le principe suivant, déjà vu dans l'exercice 2.4 : «la vitesse est la plus forte là où les équipotentielles se resserrent».

5. Pourquoi les lignes de courant (définie en tout point par la direction de $v(x, y)$) sont elles perpendiculaires aux équipotentielles ?

2.4. Expressions des opérateurs dans d'autres systèmes de coordonnées

EXERCICE 2.8. Soient $n \in \mathbb{N}$ et f la fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie par

$$f(x, y) = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^n. \quad (2.15)$$

1. En posant

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

montrer que

$$\text{grad } f(x, y) = nr^{n-2} \overrightarrow{OM}. \quad (2.16)$$

2. Retrouver (2.16) en faisant les calculs en polaires.

EXERCICE 2.9.

Dans cet exercice, on se place en coordonnées sphériques.

1. Montrer que

$$\nabla \wedge \left(\frac{\cos \phi}{r^2} u_\theta \right) = \frac{2 \sin \phi}{r^3} u_r - \frac{\cos \phi}{r^3} u_\phi.$$

2. (a) Quelle est l'expression du laplacien pour un champ scalaire à symétrie sphérique (c'est-à-dire ne dépendant que de r) ?

(b) En déduire le laplacien du potentiel scalaire d'une charge q placée à l'origine :

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}.$$

(c) Ce potentiel et son laplacien sont-ils définis à l'origine ¹ ?

EXERCICE FACULTATIF 2.10.

1. Calculer le rotationnel et la divergence de $V(x, y, z) = \overrightarrow{OM} = (x, y, z)$ et interprétez.

2. Calculer le potentiel scalaire de V .

EXERCICE FACULTATIF 2.11 (Un peu d'électromagnétisme).

On rappelle qu'un champ électrique E vérifie en électrostatique

$$\nabla \wedge E = 0.$$

¹Cette discontinuité du potentiel et la signification des équations du type

$$\nabla^2 v = 0,$$

qui posent des problèmes à l'origine ont contribué à la naissance d'objets mathématiques nouveaux qui généralisent les fonctions : les distributions (cf. UV MT41). Son «inventeur», Laurent Schwartz, grand mathématicien français du vingtième siècle (à ne pas confondre avec celui de l'inégalité de Cauchy-Schwarz) est décédé il y a quelques mois. Ses travaux sur la théorie des distributions (1945) lui ont valu en 1950 la médaille Fields, l'équivalent du prix Nobel en mathématiques.

Les distributions sont donc nées de la création d'un cadre rigoureux pour le traitement des équations de la physique (comme souvent en math ...); réciproquement, elles ont permis d'écrire correctement par la suite un certain nombre de problèmes de physique ainsi que leur traitement numérique. Bel exemple d'interaction entre les mathématiques et la physique!

On en conclut qu'il existe un potentiel scalaire V tel que

$$E = -\nabla V$$

On donne, en coordonnées cylindriques ², l'expression du champ créé par un dipôle

$$V(r, \theta, z) = \frac{P}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{r^2},$$

où ϵ_0 est une constante et P dépend du dipôle.

Montrer que l'on a

$$E_r(r, \theta, z) = \frac{2P}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{r^3},$$

$$E_\theta(r, \theta, z) = \frac{P}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sin \theta}{r^3},$$

$$E_z(r, \theta, z) = 0.$$

EXERCICE FACULTATIF 2.12. Retrouver les différentes formules des divers opérateurs indiqués en annexe à partir du tableau des multiplicateurs et des propriétés vues en cours (parmi les exemples non traités).

²On pourra consulter pour plus de détail [GS86] page 157.

TRAVAUX DIRIGÉS 3

Systèmes linéaires et matrices

3.1. Produit matriciel

EXERCICE 3.1. Calculer le produit matriciel AB dans les cas suivants :

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix},$$

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

EXERCICE 3.2. Calculer le produit matriciel ABC avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.2. Résolution de systèmes

EXERCICE 3.3. Résoudre les systèmes suivants

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + y = 3, \\ 2x + 4y = 6. \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + y + z = 6, \\ 2x - 3y + 4z = 8, \\ x + y - z = 0. \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + y + z = 6, \\ 2x - 3y + 4z = 8, \\ 3x - 2y + 5z = 14. \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x + y + z = 6, \\ 2x - 3y + 4z = 8, \\ 3x - 2y + 5z = 13. \end{cases}$$

On précisera si chaque système admet une solution, une infinité de solutions ou aucune solution. Cet exercice sera aussi traité en TP : voir la section 1.13.3 du TP 1.

3.3. Inversibilité de matrices

EXERCICE 3.4. Préciser dans chaque cas si la matrice A est inversible ou non :

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

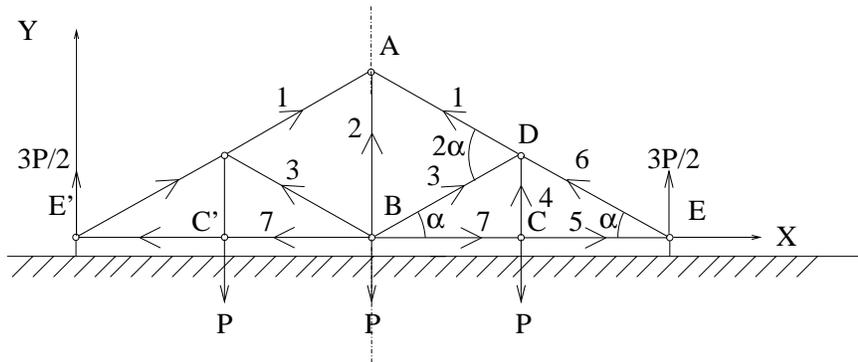
$$\text{c) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 4 & 7 \end{pmatrix},$$

$$\text{d) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 10 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Cet exercice sera aussi traité en TP : voir la section 1.13.3 du TP 1.

3.4. Application : étude de treillis

EXERCICE 3.5. On considère le treillis suivant :



On donne $\alpha = \pi/6$.

Ce treillis repose sur deux rotules en E et E' ; il est soumis à trois forces verticales d'intensités P appliquées aux points C , C' et B . Par symétrie, on admet que les réactions d'appuis sont deux forces verticales d'intensité $3P/2$, appliquées en E et E' .

Par symétrie, on ne considère que la partie droite de ce treillis ; chacune des sept poutres est orientée comme sur la figure (on oriente aussi par symétrie les poutres de la partie gauche). On appelle $(N_i)_{1 \leq i \leq 7}$ les efforts normaux dans chacune de ces sept poutres.

Les axes globaux X et Y sont choisis comme sur la figure.

1. Écrire les différents équilibre des points A, B, C, D, E en projection sur les axes globaux X et Y . On montrera que les différentes équations obtenues sont respectivement

$$\text{pour le point A :} \quad N_1 + N_2 = 0, \quad (3.1a)$$

$$\text{pour le point B :} \quad N_2 + N_3 = P, \quad (3.1b)$$

$$\text{pour le point C :} \quad N_5 - N_7 = 0, \quad (3.1c)$$

$$N_4 = P, \quad (3.1d)$$

$$\text{pour le point D :} \quad N_1 + N_3 - N_6 = 0, \quad (3.1e)$$

$$N_1 - N_3 - 2N_4 - N_6 = 0, \quad (3.1f)$$

$$\text{pour le point E :} \quad N_6 = -3P, \quad (3.1g)$$

$$N_5 + \frac{\sqrt{3}}{2}N_6 = 0. \quad (3.1h)$$

2. Résoudre le système d'équations (3.1) et en déduire les valeurs de $(N_i)_{1 \leq i \leq 7}$.

On pourra d'abord calculer les valeurs de N_4, N_5, N_6 et N_7 puis résoudre le système de trois équations (3.1a), (3.1e) et (3.1f) pour en déduire les valeurs de N_1, N_2, N_3 . On n'oubliera pas de vérifier que (3.1b) est vérifiée.

3. Montrer que

$$\begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \\ N_6 \\ N_7 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \end{pmatrix},$$

où $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq 7}$ sont des constantes numériques.

4. Indiquer les poutres comprimées et les poutres tendues. Est-ce conforme à votre intuition ?
 5. Que se passe-t-il si P est nul ? Pourquoi ?
 6. Calculer les matrices A et B telle que le système (3.1) se mette sous la forme

$$A \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \\ N_6 \\ N_7 \end{pmatrix} = B.$$

7. Pourquoi la matrice A est elle inversible ?

3.5. Application : géométrie plane

On se propose dans cet exercice d'utiliser les notions de matrice pour exprimer analytiquement les rotations planes. Ces notions peuvent aussi s'exprimer par le biais des complexes.

EXERCICE FACULTATIF 3.6 (Étude des rotations). On se place dans le plan complexe, muni d'un repère orthonormé (O, x, y) .

1. Soient $R \in \mathbb{R}_+^*$, $\theta, \phi \in \mathbb{R}$. Rappeler l'interprétation géométrique de l'égalité

$$Re^{i\phi} \times e^{i\theta} = Re^{i(\theta+\phi)}.$$

2. Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et M un point du plan de coordonnées (x, y) . En posant $z = x + iy$, calculer l'affixe du point M' , image de M par la rotation de centre O et d'angle θ .
3. En déduire les coordonnées (x', y') de M' . On met le résultat sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = S_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

où S_θ est la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par

$$S_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

4. Montrer que l'inverse de la matrice S_θ est définie par

$$S_\theta^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

5. Pourquoi a-t-on

$$S_\theta^{-1} = S_{-\theta} ?$$

Interprétez géométriquement.

6. Montrer que, pour tout $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, on a

$$S_\theta S_{\theta'} = S_{\theta+\theta'}.$$

Interpréter ce résultat géométriquement et matriciellement.

REMARQUE 3.1. Les matrices permettent d'étudier les applications linéaires planes ou spatiales (ou dans des espaces de dimensions quelconques). L'exercice 3.7 permet de traiter un autre type d'application.

EXERCICE FACULTATIF 3.7 (Étude d'une symétrie axiale). On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé. On considère la droite \mathcal{D} d'équation $y = x/2$. On appelle $p_{\mathcal{D}}$ la projection orthogonale sur la droite \mathcal{D} .

1. Soit M de coordonnées (x, y) et $H(x', y')$ l'image $p_{\mathcal{D}}(M)$ de M . Montrer que

$$H \in \mathcal{D} \implies y' = \frac{x'}{2}, \tag{3.2a}$$

$$\mathcal{D} \perp (MH) \implies 2x + y - 2x' - y' = 0. \tag{3.2b}$$

2. Déduire de (3.2) que l'on a

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ où } A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. La matrice A est elle inversible? Pourquoi?

Intégrales multiples

4.1. Révisions : calculs d'intégrales simples

Pour les exercices de cette section, on donne quelques indications, faites en notes de bas de page. Essayez de ne pas les regarder (dans un premier temps).

EXERCICE 4.1. Calculer¹ l'intégrale suivante :

$$I = \int_1^2 \log(x) dx.$$

EXERCICE 4.2. Calculer² l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos x dx.$$

EXERCICE 4.3. Calculer³ l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

EXERCICE 4.4. Calculer⁴ l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx.$$

EXERCICE FACULTATIF 4.5. On pose, pour tout entier n ,

$$I_n = \int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx.$$

1. Montrer⁵ que

$$\forall n \geq 1, \quad I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}. \quad (4.1)$$

2. Montrer que

$$I_0 = 2. \quad (4.2)$$

3. Dédurre de (4.1) et (4.2) que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \frac{2^{2n+1} (n!)^2}{(2n+1)!}. \quad (4.3)$$

¹On fera une intégration par partie.

²On linérisera en passant par les complexes, ou mieux, on fera le changement de variable suivant : $u = \sin x$.

³On fera le changement de variable suivant : $x = \sin u$.

⁴On fera un changement de variable.

⁵en faisant une intégration par partie.

4.2. Calculs d'intégrales doubles

EXERCICE 4.6. On calculera dans chacun des cas suivants

$$\iint_D f(x, y) dx dy,$$

où f et $D \subset \mathbb{R}^2$ sont donnés.

- a) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi, |y| \leq \sin x\}$ et $f(x, y) = y^2 \sin x$,
 b) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y^2 + 2x \leq 1\}$ et $f(x, y) = x^2 + y^2$,
 c) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$ et $f(x, y) = x + y$ (on passera en polaire).

EXERCICE FACULTATIF 4.7.

1. Montrer que

$$\forall x \in [0, 1], \quad \ln(1+x) = \int_0^1 \frac{x}{1+xy} dy.$$

2. En déduire, en utilisant le théorème de Fubini, la valeur de

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx.$$

4.3. Calculs d'intégrales triples

EXERCICE 4.8. On calculera dans chacun des cas suivants

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz$$

où f et $D \subset \mathbb{R}^3$ sont donnés.

- a) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq xy\}$ et $f(x, y, z) = x^2 y^3 z$,
 b) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 2pz, 0 \leq z \leq a\}$ et $f(x, y, z) = |xyz|$ ($p, a \in \mathbb{R}_+^*$ fixés).

Pour le dernier calcul, on pourra utiliser les coordonnées cylindriques.

4.4. Calculs d'aires et de volumes

EXERCICE 4.9. Calculer l'aire de la région du plan délimitée par une ellipse, de demi axes égaux à $a > 0$ et $b > 0$:

$$(x, y) \in D \iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

On pourra calculer

$$\iint_D dx dy,$$

en considérant le changement de variable :

$$\begin{cases} x = ar \cos \theta, \\ y = br \sin \theta. \end{cases}$$

EXERCICE 4.10. Calculer le volume de la pyramide représentée sur la figure 4.1.

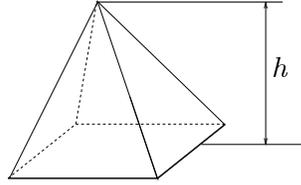


FIG. 4.1 – Une pyramide

On suppose que la base horizontale est rectangulaire. On donne la hauteur h et les dimensions du rectangle de la base.

En fait, cet exercice est un cas particulier du cas plus général, présenté dans l'exercice 4.11.

EXERCICE FACULTATIF 4.11. On considère le cône⁶ représenté sur la figure 4.2. On note h sa hauteur et S_0 sa surface de base.

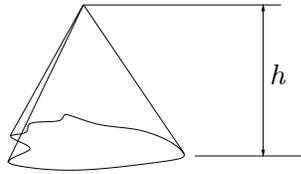


FIG. 4.2 – Un cône

Montrer que son volume est égal à

$$V = \frac{1}{3} S_0 h.$$

4.5. Applications

EXERCICE 4.12. On cherche à calculer la position du centre de gravité de la plaque homogène $ABCDE$ F définie sur la figure 4.3 (les coordonnées des points A, B, \dots sont des nombres entiers indiqués sur cette figure).

⁶C'est le volume défini par un sommet Ω et une surface de base S_0 ; le cône est l'ensemble des points des segments $[\Omega M]$ où M décrit S_0 .

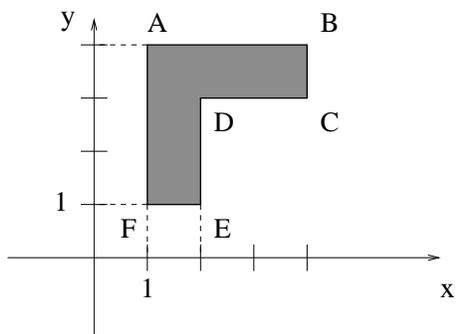


FIG. 4.3 – Une plaque homogène

1. Calculer les coordonnées x_G et y_G en utilisant directement les formules vues en cours.
2. Refaire le même calcul en décomposant la surface $ABCDEF$ en rectangles et en utilisant l'associativité du centre de gravité.

EXERCICE 4.13. Soit une plaque rectangulaire comme indiquée sur la figure 4.4. On admet que ses axes principaux sont les axes x et y indiqués sur cette figure.

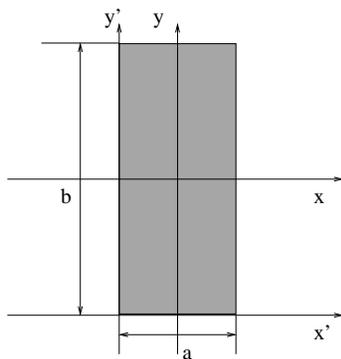


FIG. 4.4 – Une plaque rectangulaire

1. Calculer les moments quadratiques I_x et I_y en fonction de a et de b .
2. On considère les axes x' et y' comme indiqués sur la figure. Calculer les moments quadratiques $I_{x'}$ et $I_{y'}$.

On fera deux calculs : soit par intégration directe, soit en utilisant les résultats de la première question et le théorème de Huygens.

EXERCICE 4.14. On considère une sphère \mathcal{V} de rayon R , de centre l'origine et de masse volumique ρ qui ne dépend que de r (en coordonnées sphériques).

1. Calculer le volume V de cette sphère et exprimer sa masse M en fonction d'une intégrale dépendant de ρ .
2. Dans le cas où

$$\rho(r) = \rho_0 \frac{r}{R},$$

avec ρ_0 constante, déterminer M et la masse volumique moyenne de cette sphère.

Intégrales curvilignes et surfaciques

EXERCICE 5.1.

Soit le champ de vecteurs V de composantes

$$V_1(x, y, z) = x + z,$$

$$V_2(x, y, z) = y^2,$$

$$V_3(x, y, z) = x.$$

Calculer la circulation de ce champ le long de l'arc \widehat{AB} d'hélice dont les équations paramétriques sont

$$x(t) = R \cos t,$$

$$y(t) = R \sin t,$$

$$z(t) = at,$$

d'extrémités $A = (R, 0, 0)$ et $B = (R, 0, 2\pi a)$.

EXERCICE 5.2. Soit le champ de vecteurs

$$E(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \overrightarrow{OM} \text{ où } r = OM.$$

Calculer le flux de E à travers une sphère de rayon R et de centre O .

Applications des différentielles : calculs d'incertitudes

6.1. Calculs d'incertitudes

EXERCICE 6.1. On donne l'expression d'un déplacement d'un point d'une poutre d'inertie I , de module d'Young E , de longueur L , et soumise à la force F :

$$\mu = \frac{FL^3}{EI}.$$

1. En supposant que seule la force F est déterminée avec une incertitude ΔF , calculer $\Delta\mu$ l'incertitude sur μ .
2. En considérant μ comme fonction de quatre variables F , L , E et I , montrer que la différentielle $d\mu$ de μ vérifie

$$d\mu(F, L, E, I) \cdot (h_1, h_2, h_3, h_4) = \mu \left(\frac{h_1}{F} + 3\frac{h_2}{L} - \frac{h_3}{E} - \frac{h_4}{I} \right). \quad (6.1)$$

Chaque accroissement h_1 , h_2 , h_3 et h_4 relatif à chacune des variables F , L , E et I est noté dF , dL , dE et dI . Ainsi, on notera, pour (6.1),

$$d\mu = \mu \left(\frac{dF}{F} + 3\frac{dL}{L} - \frac{dE}{E} - \frac{dI}{I} \right),$$

c'est-à-dire, sous une forme plus habituelle,

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{dF}{F} + 3\frac{dL}{L} - \frac{dE}{E} - \frac{dI}{I}.$$

3. Dédurre de la question précédente qu'une majoration de l'incertitude $\Delta\mu$ en fonction des incertitude ΔF , ΔL , ΔE et ΔI , est donnée par

$$\frac{\Delta\mu}{\mu} \leq \frac{\Delta F}{F} + 3\frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta E}{E} + \frac{\Delta I}{I},$$

où l'on suppose naturellement que les grandeurs F , L , E et I et les incertitudes ΔF , ΔL , ΔE et ΔI sont strictement positives.

EXERCICE 6.2. Soit une fonction de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R} définie par

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3},$$

où α_1 , α_2 et α_3 sont trois réels quelconques.

1. En utilisant les notations de l'exercice 6.1, montrer que si x_1 , x_2 et x_3 ne s'annulent pas, on a

$$\frac{df}{f} = \alpha_1 \frac{dx_1}{x_1} + \alpha_2 \frac{dx_2}{x_2} + \alpha_3 \frac{dx_3}{x_3}.$$

2. Dédurre de la question précédente qu'une majoration de l'incertitude Δf en fonction des incertitudes Δx_1 , Δx_2 et Δx_3 , est donnée par

$$\frac{\Delta f}{f} \leq |\alpha_1| \frac{\Delta x_1}{|x_1|} + |\alpha_2| \frac{\Delta x_2}{|x_2|} + |\alpha_3| \frac{\Delta x_3}{|x_3|},$$

en supposant que x_1 , x_2 et x_3 sont tous non nuls.

EXERCICE FACULTATIF 6.3.

Généraliser l'étude de l'exercice 6.2 à la fonction f de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} définie par

$$f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}.$$

où $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont n réels quelconques.

EXERCICE FACULTATIF 6.4. Soit la fonction f de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie par

$$f(x, y) = \cos(x) + \sqrt{x^2 + y^4}.$$

Comme dans l'exercice 6.1, chercher une majoration de l'incertitude Δf en fonction des incertitudes Δx et Δy .

6.2. Étude d'extremums

Cette partie ne sera pas traitée pour la saison : Automne, année : 2004.

EXERCICE 6.5. Soit la fonction f de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = 2(x - y)^2 - x^4 - y^4.$$

Déterminer les extremums relatifs de f .

EXERCICE FACULTATIF 6.6. Soit la fonction f de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (x - y)^2 + (x + y)^3.$$

La fonction f admet-elle un extremum local ou global ?

6.3. Applications à la résistance des matériaux

EXERCICE 6.7. On considère la structure de la figure 6.1.

Cette structure est soumise au point B à la force F , est encadrée en A et est articulée en C , où l'on note X et Y les réactions d'appuis. Cette structure est hyperstatique de degré deux.

Déterminons les deux inconnues hyperstatiques, choisies égales à X et Y .

En négligeant les contributions des efforts tranchants, on montre que l'énergie potentielle de déformation de cette structure est égale à

$$W(F, X, Y) = \frac{l^3}{6EI} \left(4Y^2 - 3(F + X)Y + (F + X)^2 \right) + \frac{lX^2}{2ES} + \frac{lY^2}{2ES},$$

où E est le module d'Young, I le moment quadratique, S la section (en supposant E , I et S constants)

1. Calculer les dérivées partielles $\partial W / \partial X$ et $\partial W / \partial Y$.

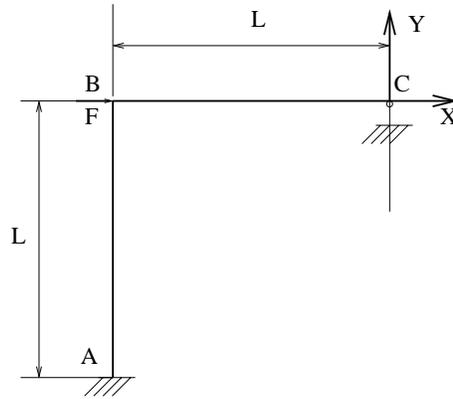


FIG. 6.1 – Une poutre hyperstatique

2. En utilisant le théorème de Ménébréa qui affirme que ces deux dérivées partielles sont nulles, montrer que l'on a un système d'équations de deux inconnues sous la forme

$$A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = FU, \quad (6.2)$$

où A est une matrice et U un vecteur colonne de \mathbb{R}^2 .

3. Quelle propriété particulière possède la matrice A ?
 4. Résoudre le système (6.2).

Équations différentielles

7.1. Équations différentielles à coefficients constants d'ordre un

EXERCICE 7.1. Résoudre les équations différentielles suivantes (avec les éventuelles conditions initiales)

- a) $2y'(t) + 3y(t) = 0$,
- b) $ay'(t) + by(t) = 0, \quad y(t_0) = y_0$,

où $a \in \mathbb{R}^*$ et $b, t_0, y_0 \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 7.2. Résoudre les équations différentielles suivantes (avec les éventuelles conditions initiales)

- a) $2y'(t) + 3y(t) = e^t, \quad y(0) = 2$,
- b) $2y'(t) + 3y(t) = \cos(t)$,
- c) $y'(t) + y(t) = t^2 + t$.

Pour la deuxième équation, on pourra passer en complexe pour trouver simplement une primitive de la fonction $\cos(t)e^{3t/2}$. Pour la troisième équation, on pourra chercher une solution particulière polynômiale.

7.2. Équations différentielles à coefficients constants d'ordre deux

EXERCICE 7.3. Résoudre les équations différentielles suivantes (avec les éventuelles conditions initiales)

- a) $y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 0$,
- b) $y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = 0$,
- c) $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0$.

EXERCICE 7.4. Résoudre l'équation différentielle suivante

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 3 \sin(t) + \cos(t).$$

EXERCICE 7.5.

1. Résoudre l'équation différentielle suivante

$$2y'' + 5y' - 3y = 0.$$

2. En déduire la solution de l'équation différentielle suivante

$$2y'' + 5y' - 3y = t^3 + t^2 - 1.$$

On cherchera d'abord une solution particulière sous la forme d'un polynôme.

Cet exercice sera aussi traité en TP : voir la section 1.13.4 du TP 1.

7.3. Applications à la mécanique

EXERCICE 7.6. On considère l'équation différentielle gérant le mouvement d'un point matériel d'abscisse x soumis à l'association en parallèle d'un ressort linéaire de raideur k et d'un patin de viscosité c et à une force extérieure nulle :

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0.$$

Ici, m , c et k sont des réels strictement positifs.

1. Résoudre cette équation différentielle (on distinguera plusieurs cas)
2. En faisant le moins de calculs possible, montrer que, dans tous les cas (et ce, indépendamment des conditions initiales)

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0.$$

Physiquement, d'où vient ce résultat ?

PROBLÈME 7.1 (Résolution du flambement dans le cas raisonnant). On étudie l'équation différentielle qui traduit l'équilibre d'une poutre en compression avec un défaut initial

$$v''(x) + \omega_0^2 v(x) = K \sin(\omega x), \quad (7.1)$$

avec les conditions aux limites

$$v(0) = v(L) = 0. \quad (7.2)$$

Ici, ω , ω_0 et K sont des constantes strictement positives et L est la longueur de la poutre étudiée.

Dans le cours, on a déjà traité le cas où $\omega_0 \neq \omega$. On suppose donc que

$$\omega = \omega_0. \quad (7.3)$$

1. Pourquoi ne peut-on pas chercher une solution particulière de (7.1) sous la forme

$$v = \lambda \sin(\omega_0 x),$$

(comme dans le cours) sous l'hypothèse (7.3) ?

2. En utilisant la méthode de la variation de la constante, résoudre (7.1) sous l'hypothèse (7.3).
3. Vérifier que la solution obtenue est bien solution de (7.1).
4. En considérant l'hypothèse (qui provient de (7.3))

$$\omega_0 L = \pi,$$

et les conditions aux limites (7.2), montrer que le système (7.1)-(7.2) n'admet une solution que dans le cas où $K = 0$, cette solution étant

$$v(x) = B_0 \sin(\omega_0 x),$$

où B_0 est une constante quelconque.

Ce problème sera aussi traité en TP : voir la section 1.13.4 du TP 1.

7.4. Pour chercher

Quelques exercices non traités en TD (sauf demande de votre part) pour chercher¹.

EXERCICE 7.7. Une grandeur évolue à une vitesse proportionnelle à elle-même. On sait que cette grandeur double tous les dix ans. Combien de temps lui faut-il pour tripler ?

EXERCICE 7.8 (Équation de Bernoulli). Soient n un entier naturel strictement supérieur à 1 et a et b deux réels. On considère l'équation différentielle suivante :

$$y'(t) = ay(t) + by^n(t). \quad (7.4)$$

On se propose de rechercher les solutions strictement positives de (7.4) sur \mathbb{R} .

1. On pose sur \mathbb{R} , $z = y^{1-n}$. Déterminer une équation différentielle satisfaite par z et la résoudre.
2. En déduire les solutions strictement positives de (7.4) sur \mathbb{R} .
3. Que donne le cas $n = 0$?

EXERCICE 7.9. Lorsqu'on perce un trou au fond d'un récipient cylindrique rempli de liquide sur une hauteur z , on démontre en mécanique des fluides que la vitesse d'expulsion du liquide par le trou est $v = \sqrt{2gz}$.

1. En supposant que la section du récipient est S et que celle du trou est s , montrer que

$$vs = -Sdz/dt.$$

Indication «tout ce qui n'est plus au dessus est sorti par le trou».

2. En déduire l'équation différentielle permettant de trouver $z(t)$.
3. En utilisant la technique de séparation des variables, intégrer cette équation différentielle ; on supposera que $z = z_0$ à $t = 0$.
4. En déduire le temps de vidange du récipient.
5. Application : la clepsydre²

On voudrait fabriquer un récipient dont la forme soit telle que dz/dt soit constant : on pourra ainsi fabriquer une horloge à eau dans laquelle la hauteur serait en relation linéaire avec le temps écoulé. Pour cela, on suppose que le récipient est de révolution autour d'un axe Oz et dont la section perpendiculaire à cet axe serait un cercle de rayon $r(z)$ ne dépendant que de z . Trouver la forme de $r(z)$.

6. Réflexion :

Pensez-vous que les grecs savaient résoudre des équations différentielles ? Comment ont-ils procédé ?

¹Ils sont issus d'un polycopié de l'UV PM11 ; merci à Gilles Blanchard et Michel Briand de me les avoir communiqués

²qui signifie l'horloge à eau, et non pas l'eau du chien.

Diagonalisation et applications

8.1. Diagonalisation

EXERCICE 8.1. La matrice suivante est elle diagonalisable ?

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 12 & 10 \\ -9 & -22 & -22 \\ 9 & 18 & 17 \end{pmatrix}.$$

On montrera que la dimension de l'espace propre associée à la valeur propre 2 est égale à un.

EXERCICE 8.2. Diagonaliser la matrice suivante sur \mathbb{C} :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

EXERCICE FACULTATIF 8.3. Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 3 et A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que A est diagonalisable. Pour cela, on pourra montrer, en résolvant le système $AX = \lambda X$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X \in \mathbb{R}^n$, que les sous-espaces propres de la matrice A sont :

- un espace de dimension $n - 2$ associé à la valeur propre 0 ;
- deux droites vectorielles associées à deux valeurs propres distinctes et non nulles que l'on calculera.

8.2. Application à la résolution de systèmes différentiels

EXERCICE 8.4. On considère le système mécanique représenté sur la figure 8.1, formé de deux points matériels de masses m_1 et m_2 , d'abscisses par rapport à la position d'équilibre $x_1(t)$ et $x_2(t)$, reliés à trois ressorts de raideur k_1 , k_2 et k_3 , soumis à aucune force extérieures.

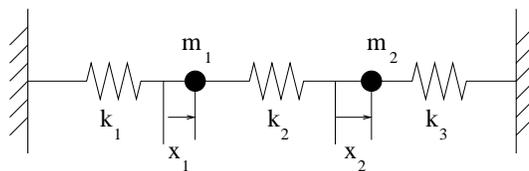


FIG. 8.1 – un système de ressorts

1. Montrer que le principe fondamental de la dynamique conduit aux deux équations suivantes

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1(t) + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 = 0, \\ m_2 \ddot{x}_2(t) - k_2 x_1 + (k_2 + k_3) x_2 = 0. \end{cases} \quad (8.1)$$

2. Déterminer les matrices M et K telles que (8.1) soit équivalent à

$$M \ddot{X}(t) + K X(t) = 0, \quad (8.2)$$

où

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

3. Pour la suite de cet exercice, on suppose que

$$m_1 = m_2 = 1, \quad k_1 = k_2 = k_3 = 1.$$

Diagonaliser la matrice K et en déduire la solution générale de (8.2).

4. Montrer qu'en choisissant les conditions initiales particulières, on peut avoir comme solution

$$\begin{cases} x_1(t) = \cos(t + \phi), \\ x_2(t) = -\cos(t + \phi), \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} x_1(t) = \cos(\sqrt{3}t + \psi), \\ x_2(t) = \cos(\sqrt{3}t + \psi). \end{cases}$$

5. À quoi correspondent ces deux régimes ?

ANNEXE A

Quelques éléments de corrections des exercices du TD 0

ÉLÉMENTS DE CORRECTION DE L'EXERCICE 0.1

En procédant de la même façon, on aboutit à $10x = 10$, puis $x = 1$.

Pour la seconde question et pour plus de détails, on pourra consulter les exercices 1.1 et 1.2 page 20 et leur correction dans [BM03].

ÉLÉMENTS DE CORRECTION DE L'EXERCICE 0.2

C'est la réponse 3 qui est exacte (à l'exclusion des autres, naturellement!).

Pour le démontrer, on note v le volume de la jarre de vin, V le volume de la jarre d'eau et a le volume du verre. Ces trois nombres sont quelconques (a est plus petit que v et V). Enfin, on suppose que le second verre contient x volume d'eau et $a - x$ volume de vin (x est inconnu, compris entre 0 et a).

Le tableau suivant indique les volumes de vin et d'eau dans chacune des deux jarres au cours des trois étapes (initiale, après le premier verre et après le second verre). Il parle de lui-même!

	étape 1	étape 2	étape 3
Volume du vin dans la jarre de vin	v	$v - a$	$v - a + (a - x) = v - x$
Volume d'eau dans la jarre de vin	0	0	$v - (v - x) = \boxed{x}$
Volume du vin dans la jarre d'eau	0	a	$a - (a - x) = \boxed{x}$
Volume d'eau dans la jarre d'eau	V	V	$V - x$

Auriez-vous une explication de ce résultat sans faire appel au «calcul»?

ÉLÉMENTS DE CORRECTION DE L'EXERCICE 0.3

Il ne faut pas raisonner sur le nombre d'allers et retours parcourus par la mouche (infini!!) mais sur le temps qu'elle met : quand le train a fini, la mouche aussi. Elle parcourt donc 200 km.

Ce paradoxe est très proche du paradoxe de la flèche, dit paradoxe de Zénon d'Élée, du sixième siècle avant Jésus-Christ. Ce paradoxe est la suivant : pour parcourir une distance l , une flèche parcourt d'abord la moitié de la distance, puis la moitié de la distance qui reste, puis la moitié de la distance qui reste, et ainsi de suite ; il lui restera donc une distance non nulle à parcourir. Et pourtant, la somme des distances parcourues (en un temps fini) est égale à

$$\frac{l}{2} + \frac{l}{4} + \frac{l}{8} + \frac{l}{16} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{l}{2^k} = l.$$

ÉLÉMENTS DE CORRECTION DE L'EXERCICE 0.4

Dans cet exercice aussi, on peut faire un nombre infini d'actions (chacune d'elle est de plus en plus courte) en un temps fini.

ÉLÉMENTS DE CORRECTION DE L'EXERCICE 0.5

Le temps que met la terre pour être dans une configuration analogue par rapport à la lune est égal à $T = 1/(T_1^{-1} - T_2^{-1}) = 1,0351$ jours, soit 1 jour et 50 minutes. La marée se décale donc de 50 minutes par jours.

Pour plus de détails, on pourra consulter le chapitre 3 de [Dow02].

ÉLÉMENTS DE CORRECTION DE L'EXERCICE 0.6

Le problème est le même que dans l'exercice 0.5. On pose $T_1 = 1$ heure et $T_2 = 12$ heures. Le premier recouvrement des deux aiguilles a lieu au bout de $T = 1/(T_1^{-1} - T_2^{-1}) = 12/11$ heures, soit environ 1 heure et 5 min. et 27 s.

Les autres problèmes sont analogues.

ÉLÉMENTS DE CORRECTION DE L'EXERCICE 0.7

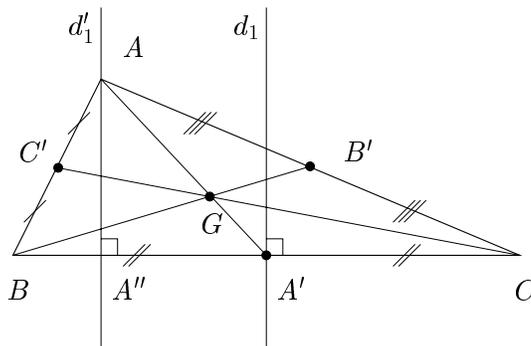


FIG. A.1 – Le triangle ABC et les droites d_1 et d_1' .

1. Voir figure A.1.

- (a) Puisque G est l'intersection des trois médianes de ABC , il se situe au tiers de chacune d'elle. On a donc

$$\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GA'},$$

ce qui signifie exactement que, l'homothétie \mathcal{H} de centre G et de rapport -2 , envoie A' sur A .

Puisque l'image d'une droite par une homothétie lui est parallèle, D_1 , l'image de d_1 par \mathcal{H} est parallèle à d_1 et est donc perpendiculaire à (BC) . D'autre part, $\mathcal{H}(A') = A$ et A' appartient à d_1 donc A appartient à D_1 . Bref, D_1 est perpendiculaire à (BC) et passe par A . Il n'y a qu'une telle droite, qui est la hauteur issue de A . On a donc $D_1 = d_1'$, soit

$$\mathcal{H}(d_1) = d_1'. \quad (\text{A.1})$$

- (b) De même, on montre que

$$\mathcal{H}(d_2) = d_2', \quad \mathcal{H}(d_3) = d_3'. \quad (\text{A.2})$$

De (A.1) et (A.2), on déduit¹ donc que

$$\mathcal{H}(d_1 \cap d_2 \cap d_3) = d_1' \cap d_2' \cap d_3',$$

¹et même si les intersections sont vides!

Puisque $0 = d_1 \cap d_2 \cap d_3$ et $H = d'_1 \cap d'_2 \cap d'_3$, on en déduit que $\mathcal{H}(0) = H$; par définition de \mathcal{H} , on a donc

$$\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO}.$$

2. On note A' le milieu de $[BC]$ et on pose

$$\vec{u} = \overrightarrow{OH} - 3\overrightarrow{OG}.$$

(a) Puisque G est l'isobarycentre de A , B et C , on a

$$3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC},$$

et donc

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO}) \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO}) \cdot \overrightarrow{BC}.$$

Puisque (HA) est perpendiculaire à (BC) , on a $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ et donc

$$(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO}) \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO}) \cdot \overrightarrow{BC},$$

soit

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO}) \cdot \overrightarrow{BC},$$

Puisque A' est le milieu de $[BC]$, on a

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA'},$$

et donc

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{OA'} \cdot \overrightarrow{BC}.$$

Ce produit scalaire est nul, puisque (OA') est perpendiculaire à (BC) ; on a donc

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{BC} = 0. \tag{A.3}$$

(b) On montre exactement de la même façon que

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = 0. \tag{A.4}$$

(c) Selon (A.3) et (A.4), \vec{u} est perpendiculaire aux deux vecteurs non colinéaires \overrightarrow{BC} et \overrightarrow{AB} ; il ne peut qu'être nul. On a donc $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$, ce qui est équivalent à (0.1).

ÉLÉMENTS DE CORRECTION DE L'EXERCICE 0.8

1. Voir la figure A.2 page suivante
2. Il suffit d'écrire que le petit carré a pour surface $4/2 = 2$ et donc comme côté $\sqrt{2}$. Cette démonstration était déjà connue des Pythagoriciens. Cette preuve, ainsi que la construction de la question 1 peut se trouver dans le Ménon de Platon, écrit au quatrième siècle avant Jésus-Christ. L'aspect irrationnel de $\sqrt{2}$ (voir exercice 0.9) a provoqué beaucoup d'émois chez les Pythagoriciens ; pour eux, l'univers était décrit par des nombres rationnels, en particulier la diagonale d'un triangle rectangle isocèle de côté 1.
3. On démontrera d'abord que le quadrilatère, «à l'intérieur» du grand carré est lui même un carré. Puis on conclura grâce aux deux expressions de l'aire de ce grand carré :

$$S = (a + b)^2 = c^2 + 2ab.$$

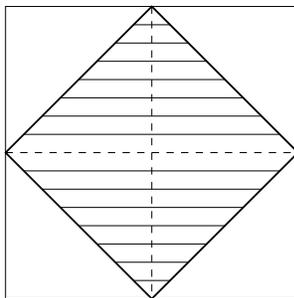


FIG. A.2 – Diviser un carré en deux.

ÉLÉMENTS DE CORRECTION DE L'EXERCICE 0.9

Supposons que

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}, \quad (\text{A.5})$$

où p et q n'ont pas de diviseurs communs.

Il est aisé de constater que si un r est un entier, si r^2 est pair, il en est de même de r .

1. Grâce à (A.5), on a

$$p^2 = 2q^2 \quad (\text{A.6})$$

Ainsi, p^2 est pair et d'après la remarque initiale p aussi.

2. Ainsi, il existe n entier tel que $p = 2n$. D'après (A.6), on a donc $4n^2 = 2q^2$ donc $q^2 = 2n^2$. Ainsi q^2 et q sont pairs.

3. Ainsi, p et q sont tous les deux divisibles par 2, ce qui contredit l'absence de diviseurs communs.

REMARQUE A.1. En généralisant, on pourrait démontrer que la racine carré d'un entier est soit entière, soit irrationnelle.

ÉLÉMENTS DE CORRECTION DE L'EXERCICE 0.10

Utiliser le théorème de Pythagore et la réponse sur la figure A.3 page suivante

Pour plus de détails, on pourra consulter le chapitre 1 de [Dow02].

ÉLÉMENTS DE CORRECTION DE L'EXERCICE 0.11

Quelle est la surface d'un polygone si celui-ci est un triangle ? Et si celui-ci n'est pas un triangle ?

ÉLÉMENTS DE CORRECTION DE L'EXERCICE 0.12

Essayer de passer de \mathcal{P}_1 à \mathcal{P}_2 !

ÉLÉMENTS DE CORRECTION DE L'EXERCICE 0.13

Est-ce que \mathcal{P}_1 est vraie ?

ÉLÉMENTS DE CORRECTION DE L'EXERCICE 0.14

Voir le chapitre 7 de [Dow02].

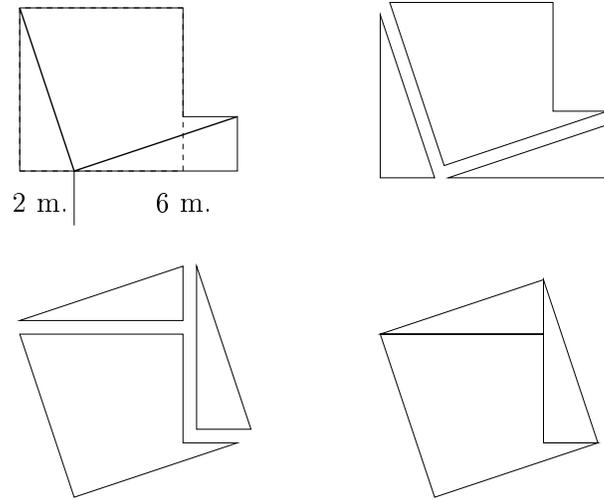


FIG. A.3 – La solution.

Bibliographie

- [Ali02] Jean-Michel Alimi. *Pourquoi la nuit est-elle noire ?* Number 18 in Les Petites Pommes du Savoir. Édition Le Pommier, 2002.
- [BM03] Jérôme Bastien et Jean-Noël Martin. *INTRODUCTION À L'ANALYSE NUMÉRIQUE. Applications sous matlab.* Dunod, 2003.
- [Bou02] Alain Bouquet. *Doit-on croire au big bang ?* Number 23 in Les Petites Pommes du Savoir. Édition Le Pommier, 2002.
- [Dow02] Gilles Dowek. *Voulez-vous jouer avec les maths ?* Number 12 in Les Petites Pommes du Savoir. Édition Le Pommier, 2002.
- [GS86] H. Gié et J.-P. Sarmant. *Mécanique, volume 1.* Technique et documentation (Lavoisier), Paris, 1986.
- [Kle02] Étienne Klein. *Le temps existe-t-il ?* Number 1 in Les Petites Pommes du Savoir. Édition Le Pommier, 2002.
- [Las02] Pierre Laszlo. *Pourquoi la mer est-elle bleue ?* Number 3 in Les Petites Pommes du Savoir. Édition Le Pommier, 2002.