MT31 Automne 2001

Examen final du 17 janvier 2002

Durée : deux heures

Une feuille A4 recto seul de notes autorisée - Calculatrice autorisée.

Pour chacun des deux exercices, on pourra admettre des questions pour passer à la suite.

On rédigera les deux exercices sur deux copies différentes.

Exercice 1. Soit la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \frac{x^2}{y}$$

1°) Pourquoi f est elle différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$?
2°) Calculer la différentielle de f sur $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$.
3°) On donne la formule de l'énergie électrostatique contenue dans une sphère de rayon R et contenant la charge Q

$$W = \frac{3}{5} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q^2}{R},$$

avec

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8,988.10^9 \text{ N.m}^2.\text{C}^{-2}.$$

On suppose que l'on connaît la charge $Q = 10^{-3}$ C avec une imprécision $\Delta Q = 1O^{-5}$ C et le rayon $R = 0,1$ m avec une imprécision $\Delta R = 0,001$ m.
Calculer W et son imprécision (dont on justifiera la formule).

Exercice 2.
1°) On considère, dans le plan, le repère orthonormé direct $(M, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$, lié aux axes (X, Y) et le repère orthonormé direct $(M, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, lié aux axes (x, y) (cf. figure 1 page 2). On considère α, l'angle entre $\overrightarrow{I}$ et $\overrightarrow{i}$.
Montrer que

$$\begin{cases} \overrightarrow{I} = \cos\alpha \, \overrightarrow{i} - \sin\alpha \, \overrightarrow{j}, \\ \overrightarrow{J} = \sin\alpha \, \overrightarrow{i} + \cos\alpha \, \overrightarrow{j}. \end{cases}$$

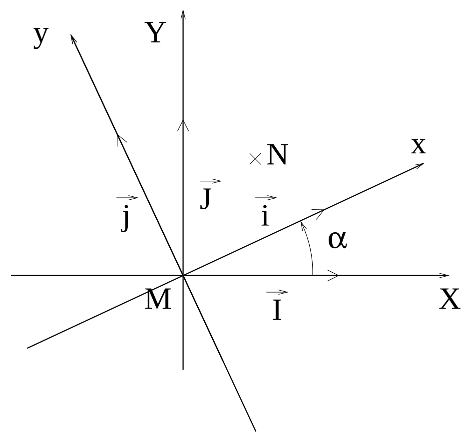

FIG. 1 – Les deux systèmes d'axes (x, y) et (X, Y)

2°) Soit N un point du plan de coordonnées (x, y) dans le repère (M, x, y) et de coordonnées (X, Y) dans le repère (M, X, Y). En écrivant

$$\overrightarrow{MN} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} = X\,\overrightarrow{I} + Y\,\overrightarrow{J},$$

montrer que l'on a la formule de changement de repère :

$$\left\{\begin{array}{l} x = X\cos\alpha + Y\sin\alpha, \\ y = -X\sin\alpha + Y\cos\alpha. \end{array}\right. \tag{1}$$

3°)

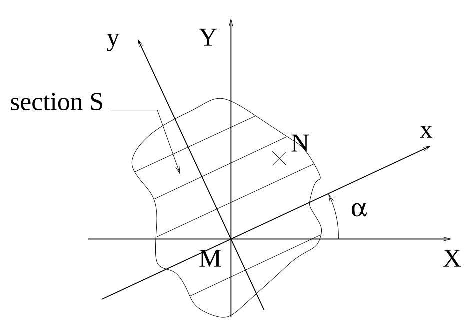

FIG. 2 – La section étudiée et les deux repères (x, y) et (X, Y)

On étudie maintenant la section d'une poutre en un point donné (cf. figure 2) et on cherche les expressions des moments quadratiques de la section I_x, I_y et I_{xy} (qui sont rappelées ici) par rapport aux axes x et y en fonction des moments I_X, I_Y et I_{XY} par rapport aux axes fixes X et Y.

On **rappelle** l'expression des moments quadratiques I_x, I_x et I_{xy} par rapport aux axes x et y

$$\begin{aligned} I_x &= \int_S y^2 dS, \\ I_y &= \int_S x^2 dS, \\ I_{xy} &= \int_S xy dS. \end{aligned}$$

En utilisant (1), montrer que le moment I_x par rapport à l'axe x est défini par

$$I_x = I_X \cos^2\alpha + I_Y \sin^2\alpha - 2I_{XY} \sin\alpha\cos\alpha. \tag{2a}$$

On **admettra** les expressions des autres moments I_y et I_{xy} par rapport aux axes x et y :

$$I_y = I_X \sin^2\alpha + I_Y \cos^2\alpha + 2I_{XY} \sin\alpha\cos\alpha, \tag{2b}$$

$$I_{xy} = (I_X - I_Y)\sin\alpha\cos\alpha + I_{XY}\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right). \tag{2c}$$

4°) En utilisant (2), montrer que

$$\begin{pmatrix} I_x & I_{xy} \\ I_{xy} & I_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_X & I_{XY} \\ I_{XY} & I_Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}. \tag{3}$$

5°) On note

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Montrer que

$$R_\alpha^{-1} = R_{-\alpha} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

6°) En déduire que (3) se réécrit

$$\begin{pmatrix} I_x & I_{xy} \\ I_{xy} & I_y \end{pmatrix} = R_\alpha \begin{pmatrix} I_X & I_{XY} \\ I_{XY} & I_Y \end{pmatrix} R_\alpha^{-1}.$$

7°) On **admet** qu'il existe un réel θ tel que

$$\begin{pmatrix} I_X & I_{XY} \\ I_{XY} & I_Y \end{pmatrix} = R_\theta^{-1} \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} R_\theta, \tag{4}$$

où D est la matrice diagonale définie par

$$D = \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

où I_1 et I_2 sont deux réels strictement positifs.
En déduire que

$$\begin{pmatrix} I_x & I_{xy} \\ I_{xy} & I_y \end{pmatrix} = R_\alpha R_\theta^{-1} D R_\theta R_\alpha^{-1}. \tag{6}$$

8°) Montrer que, si l'on choisit $\alpha = \theta$, on a

$$\begin{pmatrix} I_x & I_{xy} \\ I_{xy} & I_y \end{pmatrix} = D. \tag{7}$$

9°) Interpréter (7).

Remarque 1. En pratique, le repère (X, Y) est fixe, le repère (x, y) est variable (il est défini par l'angle α). Par rapport au repère (X, Y) les directions correspondant à l'angle α précédemment cité sont appelées directions principales de la section S. Dans ce repère, la matrice

$$\mathcal{I}(\alpha) = \begin{pmatrix} I_x & I_{xy} \\ I_{xy} & I_y \end{pmatrix},$$

dite matrice d'inertie, est diagonale.

Cette question est indépendante des questions précédentes

10°) Dans cette question, on étudie la section en T de la figure 3.

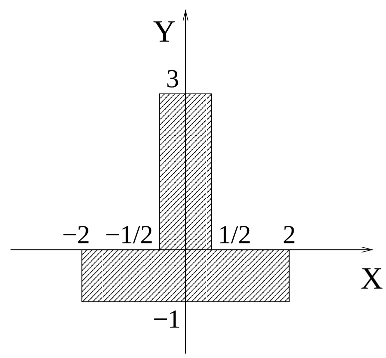

FIG. 3 – La section en T étudiée

On a représenté sur cette figure les axes (X, Y). Calculer les moments I_X, I_Y et I_{XY} par rapport à ces axes.

En déduire les directions principales.

Les deux dernières questions sont facultatives

11°) Qu'obtient on si on choisit

$$\alpha = \theta + \frac{\pi}{2},$$

dans (6) ? Interpréter.

12°) Comment feriez vous pour mettre la matrice $\mathcal{I}(\alpha)$ sous la forme

$$\mathcal{I}(\alpha) = P^{-1} D P,$$

où P est une matrice inversible et D est diagonale ?