

Examen final du 24 janvier 2003

Durée : deux heures

Une feuille A4 de notes autorisée - Calculatrice autorisée.

Exercice 1 (Matrices).

Pour chacune des questions suivantes, on donnera quelques résultats intermédiaires pour expliquer les calculs.

1. Résoudre chacun des systèmes suivants :

a)
$$\begin{cases} 2x + 3y = 8, \\ -3x + 4y = 5. \end{cases}$$

b)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

c)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

2. Pour a , b et c réels, déterminer si les matrices suivantes sont inversibles et, le cas échéant, déterminer leur inverse :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & c \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 (Équations différentielles).

1. Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y''(t) - 4y'(t) + 5y(t) = 0. \tag{1}$$

2. En déduire la solution de l'équation différentielle suivante :

$$y''(t) - 4y'(t) + 5y(t) = 4(\cos t + \sin t) + 5t^2 - 8t - 3. \quad (2)$$

On pourra chercher une solution particulière de (2) sous la forme

$$y(t) = \alpha \cos t + \beta \sin t + at^2 + bt + c.$$

3. Déterminer la solution de (2) qui vérifie

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = -1. \quad (3)$$

Exercice 3 (Calcul de $\cos(2\pi/5)$ et construction du pentagone régulier).

Pour tout cet exercice, on considère le complexe z défini par

$$z = e^{\frac{2i\pi}{5}}, \quad (4)$$

et on pose

$$c = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right), \quad s = \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right). \quad (5)$$

1. (a) Montrer que

$$z^5 = 1, \quad (6)$$

puis que

$$z^3 = \bar{z}^2. \quad (7)$$

(b) En déduire deux équations en c et s puis en déduire que

$$4c^2 + 2c - 1 = 0. \quad (8)$$

(c) En déduire que

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}. \quad (9)$$

(d) Quelle est la valeur de $\sin(2\pi/5)$?

2. On cherche dans cette question à tracer le pentagone à la règle et au compas, c'est-à-dire uniquement à partir d'une règle non graduée, d'un compas et d'un segment de référence qui représente la longueur unité.

(a) En utilisant le théorème de Pythagore, montrer qu'à partir d'un segment de longueur 1 et d'un segment de longueur $1/2$, on peut construire la longueur $\sqrt{5}/2$.

- (b) En déduire que la construction suivante (on se reportera à la figure 1) permet de construire l'angle $2\pi/5$: on montrera que l'angle $\widehat{IOM_1}$ est égal à $2\pi/5$.
- tracer (OIJ) un repère orthonormé et I' le symétrique de I par rapport à O ;
 - soit A le milieu de $[I'O]$ et \mathcal{L} le cercle de centre A et passant par J ;
 - le cercle \mathcal{L} coupe la demi droite $[OI]$ en B ;
 - C est le milieu de $[OB]$;
 - la droite perpendiculaire à (OI) passant par C coupe le cercle trigonométrique (de centre O et de rayon 1) en M_1 , point d'ordonnée positive.

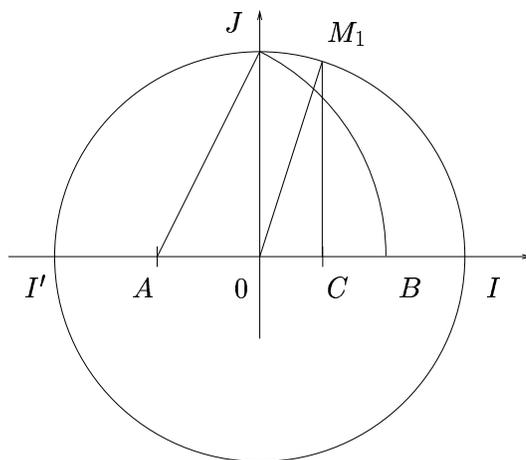


FIG. 1 – La construction de $2\pi/5$.

- (c) En déduire la construction du pentagone régulier inscrit dans un cercle de coté un et tracer la construction sur votre copie.