MT31 Automne 2003

Examen final du 21 janvier 2004

Durée : deux heure(s)

Une feuille A4 recto seul de notes autorisée - Calculatrice autorisée.

Exercice 1 (Inverse de matrice).

1. Pour tout a réel, déterminer, le cas échéant, l'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 2a^2 \end{pmatrix}.$$

2. Résoudre le système

$$AX = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 (Équation différentielle).

1. Résoudre l'équation différentielle

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 0.$$

2. En déduire la solution de l'équation différentielle

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = \cos t + 2e^{-3t}. \tag{1}$$

On pourra chercher une solution particulière de (1) sous la forme

$$y(t) = \alpha \cos t + \beta \sin t + \gamma e^{-3t},$$

où α, β et γ sont des réels.

3. Quelle est la solution de (1) vérifiant

$$y(0) = \frac{1}{5}, \quad y'(0) = -\frac{8}{5} \text{ ?}$$

Exercice 3 (Diagonalisation graphique de matrices symétriques).
Attention, dans cet exercice, nous évoquons des notions de mécanique pour illustrer un calcul matriciel, mais aucune connaissance de mécanique n'est exigée.
Dans le plan (x, y), on considère un repère $(\vec{n}, \vec{t})$ direct (cf. figure 1 page suivante).

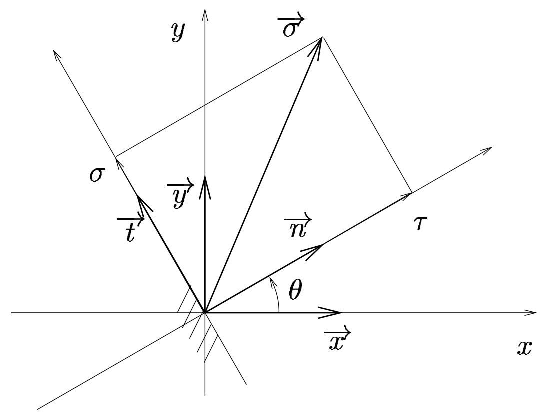

FIG. 1 – Une facette dans le plan, définie par l'angle θ

On décompose le vecteur contrainte $\overrightarrow{\sigma}$ reçu par la facette étudiée sous la forme

$$\overrightarrow{\sigma_\theta} = \sigma_\theta \overrightarrow{n} + \tau_\theta \overrightarrow{t}, \tag{2}$$

où θ est l'angle entre $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{n}$. On peut montrer que

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\cos 2\theta, \tag{3}$$

et

$$\tau_\theta = \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1)\sin 2\theta, \tag{4}$$

où σ_1 et σ_2 sont deux contraintes fixées (les contraintes principales). Pour toute valeur de θ, on considère la matrice Σ_θ définie par

$$\Sigma_\theta = \begin{pmatrix} \sigma_\theta & -\tau_{\theta+\frac{\pi}{2}} \\ \tau_\theta & \sigma_{\theta+\frac{\pi}{2}} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

On constate facilement que

$$\Sigma_\theta = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\cos 2\theta & \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1)\sin 2\theta \\ \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1)\sin 2\theta & \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) - \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\cos 2\theta \end{pmatrix} \tag{6}$$

Pour tout ce problème, on supposera[1] que

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \tag{7}$$

1. (a) Montrer que, dans le plan, l'ensemble décrit par le point de coordonnées $(\sigma_\theta, \tau_\theta)$ est un cercle. Précisez le centre et le rayon de ce cercle.

   (b) Faites une figures où vous mettrez en évidence σ_θ, τ_θ, σ_1, σ_2 et θ.

2. Montrer que, en notant

$$c = \cos\theta, \quad s = \sin\theta, \tag{8}$$

[1]sans perte de généralité, quitte à intervertir σ_1 et σ_2.

on a

$$\Sigma_\theta = \begin{pmatrix} c^2\sigma_1 + s^2\sigma_2 & -cs\sigma_1 + cs\sigma_2 \\ -cs\sigma_1 + cs\sigma_2 & s^2\sigma_1 + c^2\sigma_2 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

3. On pose, pour tout θ,

$$S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{10}$$

   (a) Que représente la matrice S_θ ?

   (b) Montrer que

$$S_\theta^{-1} = S_{-\theta} = {}^tS_\theta. \tag{11}$$

   (c) On pose

$$D = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

   Montrer que

$$\Sigma_\theta = S_{-\theta} D S_{-\theta}^{-1}. \tag{13}$$

   (d) Interpréter (13) et (12) en terme de diagonalisation.

4. On vient de démontrer que toute matrice Σ_θ défini par (6) est symétrique et diagonalisable. On a de plus donné une construction géométrique permettant de donner les valeurs et vecteurs propres. Réciproquement, on se donne une matrice symétrique

$$A = \begin{pmatrix} d & e \\ e & f \end{pmatrix}, \tag{14}$$

où (d, e, f) sont réels. Nous allons démontrer que A est diagonalisable et fournir une construction graphique des éléments propres de A.

On considère l'égalité

$$A = S_{-\theta} D S_{-\theta}^{-1}, \tag{15}$$

où S_θ est défini par (10) et D par (12). Pour toute la suite, on rappelle que l'on fait l'hypothèse (7).

   (a) Montrer que (15) est équivalent à

$$d = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\cos(2\theta), \tag{16a}$$

$$e = \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1)\sin(2\theta), \tag{16b}$$

$$f = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) - \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\cos(2\theta). \tag{16c}$$

   (b) Déduire de (16), une construction géométrique de σ_1, σ_2 et θ à partir de d, e et f. On utilisera les résultats des questions 1a et 1b.

(c) Montrer que (16) est équivalent à

$$\Omega = \frac{d+f}{2}, \tag{17a}$$

$$R = \sqrt{(d-\Omega)^2 + e^2}, \tag{17b}$$

$$\sigma_1 = \Omega + R, \tag{17c}$$

$$\sigma_2 = \Omega - R, \tag{17d}$$

et

$$R\cos(-2\theta) = d - \Omega, \tag{17e}$$

$$R\sin(-2\theta) = e. \tag{17f}$$

(d) Pourquoi (17) permet de déterminer σ_1, σ_2 et θ à partir de d, e et f ?

5. **Application**

(a) En utilisant la méthode graphique de la question 4b, diagonaliser les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

(b) Retrouver cela par le calcul en utilisant les résultats de la question 4c.

6. **Question facultative**

Retrouver les expressions (17c) et (17d) de σ_1 et σ_2 obtenues en diagonalisant la matrice A définie par (14) «à la main».

7. **Question facultative**

Pensez-vous que cette méthode de diagonalisation puisse s'adapter à une matrice symétrique réelle d'ordre 3 ?

Corrigé

Le corrigé sera disponible sur `http://utbmjb.chez.tiscali.fr/`