

Examen final du 18 janvier 2005

Durée : deux heure(s)

Une feuille A4 recto seul de notes autorisée - Calculatrice autorisée. - Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la présentation

Exercice 1 (Intégrales multiples).

1. Centre de gravité

Déterminer le centre de gravité du domaine :

$$D = \left\{ (x, y), \quad x \geq 0, y \geq 0, \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} \leq 1 \right\}$$

2. Fenêtre de Viviani

Soit le domaine D limité par la sphère de centre $(0, 0, 0)$ et de rayon 1 et le cylindre d'équation $x^2 + y^2 = 1$. Calculer le volume de D .

Exercice 2 (Équations différentielles et diagonalisation).

Soient R , λ et f trois nombres positifs.

Dans cet exercice, on cherche à résoudre de deux façon différentes le système différentiel suivant : pour tout $t \in [0, \pi/2]$,

$$\frac{dx_1(t)}{dt} + x_2(t) + R\lambda \sin t = 0, \quad (1a)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} - x_1(t) - R\lambda \cos t = 0, \quad (1b)$$

$$\frac{dx_3(t)}{dt} + Rx_1(t) = 0, \quad (1c)$$

avec les conditions initiales :

$$x_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = -f, \quad (2a)$$

$$x_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad (2b)$$

$$x_3\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \quad (2c)$$

1. (a) Montrer qu'en éliminant x_2 des équations (1a) et (1b), on a :

$$\forall t \in]0, \pi/2[, \quad \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} + x_1(t) = -2R\lambda \cos t, \quad (3a)$$

avec les conditions initiales

$$x_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = -f, \quad (3b)$$

$$\frac{dx_1}{dt}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -R\lambda. \quad (3c)$$

(b) Chercher une solution particulière de (3a) sous la forme $t \mapsto Kt \sin t$ où K est une constante.

(c) En déduire la solution x_1 de (3).

2. (a) En déduire x_2 en utilisant (1a).

(b) En déduire x_3 en utilisant (1c) et (2c).

3. On utilise maintenant une méthode vue en cours¹ pour résoudre le système différentiel (1) : on le considère comme une seule équation différentielle d'ordre un dans \mathbb{R}^3

$$\forall t \in [0, \pi/2], \quad \dot{X}(t) + AX(t) = g(t), \quad (4a)$$

avec

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}, \quad (4b)$$

$$g(t) = \begin{pmatrix} -R\lambda \sin t \\ R\lambda \cos t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ R & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4c)$$

et avec les conditions initiales

$$X\left(\frac{\pi}{2}\right) = X_{\pi/2} = \begin{pmatrix} -f \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4d)$$

- (a) Diagonaliser la matrice A dans \mathbb{C} . On posera $D = P^{-1}AP$ avec

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 1 & R & -R \end{pmatrix}.$$

On admettra que

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2R & 2 \\ -i & -1 & 0 \\ i & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

¹et bien plus pénible ...

(b) Résoudre les trois équations différentielles

$$\dot{y}_1 = R^2 \lambda \cos t, \quad (5a)$$

$$\dot{y}_2 + iy_2 = -\frac{R\lambda e^{-it}}{2}, \quad (5b)$$

$$\dot{y}_3 - iy_3 = \frac{R\lambda e^{it}}{2}. \quad (5c)$$

On cherche une solution particulière de (5a) sous la forme

$$y_1(t) = \mu \sin t,$$

une solution particulière de (5b) sous la forme

$$y_2(t) = \nu t e^{-it},$$

et une solution particulière de (5c) sous la forme

$$y_3(t) = \kappa t e^{it}.$$

(c) Montrer que le système différentiel (4a) est équivalent à

$$\dot{Y}(t) + DY(t) = P^{-1}g(t), \quad (6)$$

où l'on a posé :

$$Y(t) = P^{-1}X(t). \quad (7)$$

(d) Montrer que les conditions initiales (4d) sont équivalentes à

$$Y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{if}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

(e) Dédire de tout cela la solution de (4).

(f) Conclure sur cette méthode !