MT31 Automne 2002

Corrigé de l'examen final du 24 janvier 2003

Correction de l'exercice 1.

1. Le système a) se met sous la forme
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}$$
Puisque le déterminant de la matrice $d = 2 \times 4 + 3 \times 3 = 17$ est non nul, d'après le cours, on a
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{d} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{d} \begin{pmatrix} 17 \\ 34 \end{pmatrix},$$
et donc
$$\boxed{x = 1, \quad y = 2.}$$
Après calcul, on obtient l'unique solution du système b) :
$$\boxed{x = 1, \quad y = 0, \quad z = 1.}$$
Pour le système c), on constate que la ligne 2 est égale à la ligne 1 multipliée par 2. Ainsi, la matrice n'est pas inversible et, d'après le cours, le système admet soit une infinité de solution soit aucune solution. On constate ensuite que les deux premières équations sont équivalentes et donc
$$\boxed{\text{le système admet une infinité de solution.}}$$
2. Le déterminant de A est égal à $d = c - ab$ et donc, d'après le cours, on a
$$\boxed{\text{si } c - ab = 0, \text{ la matrice } A \text{ n'est pas inversible },}$$
et
$$\boxed{\text{si } c - ab \neq 0, \text{ la matrice } A \text{ est inversible et } A^{-1} = \frac{1}{c - ab} \begin{pmatrix} c & -a \\ -b & 1 \end{pmatrix}.}$$
Comme dans le cours, on considère le système
$$B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix},$$

et on exprime, si possible (x, y, z) en fonction de (x', y', z'). Ici le calcul est simple car B est triangulaire. Après calculs, on a

$$\begin{cases} x = x' - \frac{a}{2}y' + \left(\frac{ac}{6} - \frac{b}{3}\right) z', \\ y = \frac{1}{2}y' - \frac{c}{6}z', \\ z = \frac{1}{3}z'. \end{cases}$$

Cela implique que B est inversible et que

$$\boxed{B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{2} & \frac{ac}{6} - \frac{b}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{c}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.}$$

Correction de l'exercice 2.

1. L'équation caractéristique de l'équation différentielle à second membre nul est
$$r^2 - 4r + 5 = 0, \tag{1}$$
de solution $r = 2 \pm i$. Ainsi, d'après le cours,
$$\boxed{y(t) = e^{2t}(A \cos t + B \sin t),} \tag{2}$$
où A et B sont des constantes.
2. Si on cherche y sous la forme
$$y(t) = \alpha \cos t + \beta \sin t + at^2 + bt + c, \tag{3}$$
en réinjectant cette expression dans l'équation différentielle avec second membre, on obtient après identification des coefficients :
$$\begin{cases} \alpha - \beta = 1, \\ \alpha + \beta = 1, \\ a = 1, \\ -8a + 5b = -8, \\ 2a - 4b + 5c = -3. \end{cases}$$
Après calculs, on obtient
$$\alpha = 1, \quad \beta = 0, \quad a = 1, \quad b = 0, \quad c = -1.$$
Puisque la solution générale de l'équation différentielle avec second membre est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'EHA, il vient
$$\boxed{y(t) = e^{2t}(A_0 \cos t + B_0 \sin t) + \cos t + t^2 - 1,} \tag{4}$$
où A_0 et B_0 sont des constantes.
3. D'après (4), on a
$$\begin{aligned} y(0) &= A_0, \\ y'(0) &= 2A_0 + B_0. \end{aligned}$$

Ainsi, d'après les conditions initiales, on a donc $A_0 = 1$ et $B_0 = -3$. Ainsi

$$\boxed{y(t) = e^{2t}(\cos t - 3\sin t) + \cos t + t^2 - 1.} \tag{5}$$

Correction de l'exercice 3.

1. (a) Il est immédiat que

$$z^5 = \left(e^{\frac{2i\pi}{5}}\right)^5 = 1.$$

On pouvait aussi remarquer que z est une racine 5-ième de l'unité. Puisque $z^5 = 1$ et que z est non nul, on a

$$z^3 = \frac{1}{z^2}. \tag{6}$$

D'autre part, $|z| = 1$, ce qui s'écrit aussi

$$z = \frac{1}{\overline{z}}.$$

Selon (6), on a donc

$$\boxed{z^3 = \overline{z}^2.} \tag{7}$$

(b) En remplaçant z par $c + is$ dans (7) et en développant, on obtient

$$c^3 + 3ic^2s - 3cs^2 - is^3 = c^2 - 2ics - s^2.$$

En séparant les parties réelles et imaginaires, on a donc

$$\boxed{c^3 - 3cs^2 = c^2 - s^2,} \tag{8}$$

et

$$\boxed{3c^2s - s^3 = -2cs.} \tag{9}$$

Dans l'équation (9), on peut factoriser s et le simplifier, puisque $2\pi/5$ n'est pas un multiple de π. On obtient donc

$$3c^2 - s^2 + 2c = 0,$$

et en utilisant

$$s^2 = 1 - c^2, \tag{10}$$

on obtient donc

$$\boxed{4c^2 + 2c - 1 = 0.} \tag{11}$$

Remarque 1. On pouvait aussi partir de l'équation (8) pour obtenir le même résultat, avec un petit plus de calculs.

(c) On résout l'équation du second degré (11) : ainsi

$$c = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}. \tag{12}$$

Puisque $2\pi/5$ appartient à $[0, \pi/2]$, son cosinus est strictement positif et dans (12), on choisit l'unique racine positive. On a donc

$$\boxed{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.} \tag{13}$$

(d) De même, le sinus de $2\pi/5$ est strictement positif et de (10), on déduit

$$\boxed{\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.} \tag{14}$$

2. (a) Remarquons tout d'abord qu'il est immédiat de tracer le milieu d'un segment déjà construit ainsi qu'un angle droit, uniquement à la règle et au compas (en traçant une médiatrice par exemple).

   L'hypothénuse d'un triangle rectangle de côtés égaux à 1 et $1/2$ est égale à $\sqrt{1+1/4} = \sqrt{5}/2$.

   (b) Analysons les différents points de la construction proposée :

   - premier point : rien à dire !
   - d'après la question précédente, on a $AJ = \sqrt{5}/2$;
   - par construction du cercle $\mathcal{L}$, on a donc
   $$AB = \frac{\sqrt{5}}{2} \;;$$
   - ainsi,
   $$x_C = OC = \frac{1}{2}OB = \frac{1}{2}(AB - AO) = \frac{\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{4} \;;$$
   - d'après (13), l'abscisse de M_1 est égale à $\cos(2\pi/5)$ et donc $\widehat{IOM_1} = 2\pi/5$.

   (c) On reporte alors à l'aide du compas la corde IM_1 et on obtient les autres sommets M_2, M_3 et M_4 du pentagone régulier, inscrit dans le cercle trigonométrique.

   Voir figure 1.

Pour plus de détails sur les constructions à la règle et au compas (par exemple la construction d'un polygone régulier à 17 côtés !), sur la quadrature du cercle ou sur de nombreux problèmes de géométrie (par exemple la détermination du centre d'un cercle de rayon inconnu, uniquement au compas), on pourra consulter le très bon ouvrage suivant :

Jean-Claude Carrega. *Théorie des corps, la règle et le compas.* Hermann, 1984.

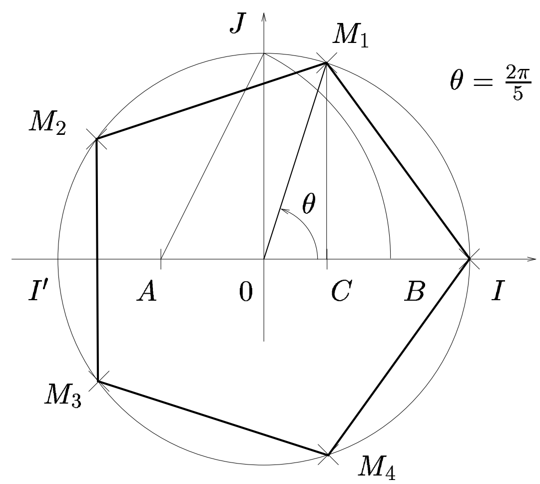

FIG. 1 – La construction du pentagone.