

**Corrigé de l'examen final du 21 janvier 2004**

**Correction de l'exercice 1.**

1. Il fallait prendre à l'éventuelle nullité de  $a$ . Si  $a$  est nul,  $A$  n'est pas inversible. Sinon,  $A$  est inversible et

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{a} \\ -\frac{1}{a} & \frac{1}{a^2} \end{pmatrix}.$$

2. Si  $a$  est non nul, le système

$$AX = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}.$$

admet une unique solution :

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sinon, ce système admet une infinité de solutions, définies par

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix} \text{ avec } y \in \mathbb{R}.$$

Voir<sup>1</sup> le petit script matlab fourni `invmatrice`.

**Correction de l'exercice 2.**

1. Puisque l'équation caractéristique de l'équation différentielle (sans second membre) est  $r^2 - 3r + 2 = 0$  de solutions  $\{1, 2\}$ , on a

$$\boxed{y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t}}, \quad (1)$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont deux réels.

2. On cherche une solution particulière de

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = \cos t + 2e^{-3t}, \quad (2)$$

sous la forme

$$y(t) = \alpha \cos t + \beta \sin t + \gamma e^{-3t}, \quad (3)$$

---

<sup>1</sup>Ce n'est pas tant pour le calcul de  $A^{-1}$  que je vous donne ce script, mais pour vous montrer un exemple de calcul en symbolique.



où  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sont des réels. En réinjectant (3) dans (2), on obtient par identification  $\gamma = 1/10$  et le système

$$\begin{cases} 3\alpha + \beta = 0, \\ \alpha - 3\beta = 1, \end{cases}$$

ce qui donne  $\alpha = 1/10$  et  $\beta = -3/10$ . En sommant cette solution particulière et la solution générale (1) de l'équation homogène associée, on obtient donc la solution générale de (2) :

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{10} \cos(t) - \frac{3}{10} \sin(t) + \frac{1}{10} e^{-3t} + C_1 e^t + C_2 e^{2t}}, \quad (4)$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont deux réels.

3. L'écriture de  $y(0) = 1/5$  et  $y'(0) = -8/5$  fournit le système

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 - 2C_2 = -1, \end{cases}$$

ce qui donne  $C_1 = 1$  et  $C_2 = -1$ . On a donc

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{10} \cos(t) - \frac{3}{10} \sin(t) + \frac{1}{10} e^{-3t} + e^t - e^{2t}}. \quad (5)$$

On pourra aussi voir le petit script matlab fourni **resoudequadiff**, qui donne successivement les résultats (1), (4) et (5).

### Correction de l'exercice 3.

#### Avertissement

Dans cet exercice, une notation pouvait prêter à confusion<sup>2</sup> : dans la matrice

$$D = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix},$$

les valeurs  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont des valeurs constantes et fixées et ne correspondent pas aux valeurs prises par

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\theta,$$

quand  $\theta = 1$  ou  $\theta = 2$ . En fait, elle correspondent à  $\sigma_\theta$  quand  $\theta \in \{0, \pi/2\}$ .

Cette exercice provient de l'étude du cercle de Mohr, bien connu des mécaniciens. On pourra consulter [Bas03], le médian de MQ41 (Automne 2003), [Duv90] ou encore pour un regard plus «matheux» [Bas68].

*Remarque 1.* Justifions sommairement les équations (10) et (11). Dans le plan  $(x, y)$ , on considère un repère  $(\vec{n}, \vec{t})$  direct (cf. figure 1 page ci-contre).

On peut montrer qu'il existe un tenseur (ou une matrice)  $[\sigma]$  tel que la contrainte  $\vec{\sigma}$  recue par la facette de normale  $\vec{n}$  soit :

$$\vec{\sigma} = [\sigma] \vec{n} \quad (6)$$

On projette le vecteur  $\vec{\sigma}$  sur le repère  $(\vec{n}, \vec{t})$  :

$$\vec{\sigma} = \sigma_\theta \vec{n} + \tau_\theta \vec{t}. \quad (7)$$

---

<sup>2</sup>Mais cela ne vous a pas dérangé !



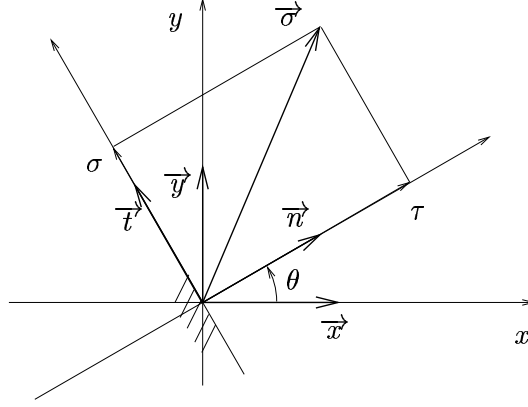


FIG. 1 – Une facette dans le plan, définie par l'angle  $\theta$

Puisque la matrice  $[\sigma]$  est symétrique réelle, on peut la diagonaliser ; quitte à changer de repère, on se place dans un repère où  $[\sigma]$  est diagonale :

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Ainsi, après calculs, (6), (7) et (8), impliquent (10) et (11).

1. (a) Puisque l'on fait l'hypothèse

$$\boxed{\sigma_1 \geq \sigma_2}, \quad (9)$$

on peut réécrire

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\cos 2\theta, \quad (10)$$

et

$$\tau_\theta = \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1)\sin 2\theta, \quad (11)$$

sous la forme

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) + R\cos(-2\theta), \quad (12)$$

et

$$\tau_\theta = R\sin(-2\theta), \quad (13)$$

où

$$\boxed{R = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \geq 0}. \quad (14)$$

Ainsi, les équations (12) et (13) nous montrent que, dans le plan,

$$\boxed{\text{l'ensemble décrit par le point de coordonnées } (\sigma_\theta, \tau_\theta) \text{ est un cercle } \mathcal{C}.} \quad (15)$$



De plus,

$$\boxed{\text{Le centre de } \mathcal{C} \text{ est le point de coordonnées } ((\sigma_1 + \sigma_2)/2, 0),} \quad (16)$$

et

$$\boxed{\text{le rayon de } \mathcal{C} \text{ est } R = (\sigma_1 - \sigma_2)/2.} \quad (17)$$

- (b) Soient les points  $M_1(\sigma_\theta, \tau_\theta)$ ,  $M'_1(\sigma_\theta, -\tau_\theta)$ ,  $Q_1(\sigma_1, 0)$  et  $Q_2(\sigma_2, 0)$ . Les équations (12) et (13) nous montrent que l'angle  $\widehat{(\overrightarrow{\Omega Q_1}, \overrightarrow{\Omega M_1})}$  est égal à  $-2\theta$ . Les propriétés de l'angle au centre dans un cercle prévoient que  $\theta = \widehat{(\overrightarrow{Q_2 Q_1}, \overrightarrow{Q_2 M'_1})}$ . On peut tracer la figure 2 où apparaissent  $\sigma_\theta$ ,  $\tau_\theta$ ,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\theta$

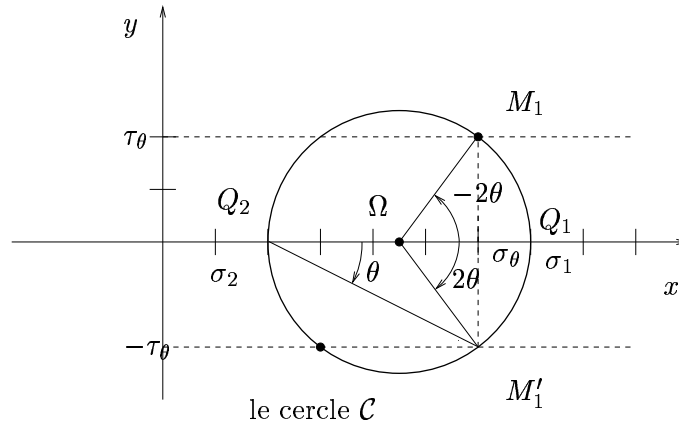


FIG. 2 – Construction graphique du cercle  $\mathcal{C}$ .

Le cercle  $\mathcal{C}$  est appelé le cercle de Mohr.

2. On rappelle que

$$\boxed{\Sigma_\theta = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\theta & \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1) \sin 2\theta \\ \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1) \sin 2\theta & \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) - \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\theta \end{pmatrix}.} \quad (18)$$

On pose

$$\boxed{c = \cos \theta, \quad s = \sin \theta.} \quad (19)$$

En utilisant les égalités

$$\begin{aligned} \cos \theta \sin \theta &= \frac{1}{2} \sin 2\theta, \\ \cos^2 \theta &= \frac{1}{2} (\cos 2\theta + 1), \\ \sin^2 \theta &= \frac{1}{2} (-\cos 2\theta + 1), \end{aligned}$$



on obtient, grâce à (18),

$$\Sigma_\theta = \begin{pmatrix} c^2\sigma_1 + s^2\sigma_2 & -cs\sigma_1 + cs\sigma_2 \\ -cs\sigma_1 + cs\sigma_2 & s^2\sigma_1 + c^2\sigma_2 \end{pmatrix}, \quad (20)$$

3. (a) On a déjà étudié en TD (voir chapitre systèmes linéaires et matrice) la matrice définie par

$$S_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (21)$$

On a vu qu'elle représentait la rotation plane de centre l'origine et de rayon  $\theta$ .

(b) Nous avons aussi vu que

$$S_\theta^{-1} = S_{-\theta} = {}^t S_\theta. \quad (22)$$

(c) On pose

$$D = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}, \quad (23)$$

et on calcule successivement

$$S_{-\theta} D S_{-\theta}^{-1} = S_{-\theta} D S_\theta = \begin{pmatrix} c\sigma_1 & s\sigma_2 \\ -s\sigma_1 & c\sigma_2 \end{pmatrix} S_\theta = \begin{pmatrix} c^2\sigma_1 + s^2\sigma_2 & -cs\sigma_1 + cs\sigma_2 \\ -cs\sigma_1 + cs\sigma_2 & s^2\sigma_1 + c^2\sigma_2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\Sigma_\theta = S_{-\theta} D S_{-\theta}^{-1}. \quad (24)$$

(d) On sait d'après le cours sur la diagonalisation qu'une matrice  $A$  est diagonalisable si et seulement si il existe une matrice  $Q$  inversible et une matrice  $D$  diagonale telles que

$$A = Q D Q^{-1}. \quad (25)$$

La matrice  $Q$  représente la matrice de changement de base de l'«ancienne» base à la «nouvelle» base. En comparant (24) et (25), on en déduit que

$$\boxed{\text{la matrice } \Sigma_\theta \text{ est diagonalisable,}} \quad (26a)$$

et que

$$\boxed{\text{le changement de base correspond à une rotation du repère initial d'un angle } -\theta.} \quad (26b)$$

D'après la forme (23) de  $D$ ,

$$\boxed{\text{les valeurs propres de } \Sigma_\theta \text{ sont } \sigma_1 \text{ et } \sigma_2.} \quad (26c)$$

De plus, d'après la forme (21) de  $S_{-\theta}$ , les vecteurs propres associés à  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont :

$$u_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \text{ et } u_2 = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (26d)$$



4. (a) Soit

$$A = \begin{pmatrix} d & e \\ e & f \end{pmatrix}, \quad (27)$$

où  $(d, e, f)$  sont réels. On considère  $S_\theta$  défini par (21),  $\Sigma_\theta$  défini par (18) et  $D$  est défini par (23). D'après (24), l'égalité

$$A = S_{-\theta} D S_{-\theta}^{-1}, \quad (28)$$

est équivalente à

$$A = \Sigma_\theta.$$

Par définition de  $A$ , cette dernière est donc équivalente à

$$d = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \cos(2\theta), \quad (29a)$$

$$e = \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1) \sin(2\theta), \quad (29b)$$

$$f = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) - \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \cos(2\theta). \quad (29c)$$

- (b) La matrice  $A$  est diagonalisable si et seulement si est (29) vérifié. Pour obtenir une construction géométrique de  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\theta$  à partir de  $d$ ,  $e$  et  $f$ , on utilise «à l'envers» la construction géométrique de la question 1b : on construit  $M_1(\sigma_\theta, \tau_\theta) = M_1(d, e)$ . On remarque ensuite que, selon (29c),

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) - \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\theta = f$$

et, selon (29b),

$$\frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1) \sin 2\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1) \sin 2\theta = -e.$$

Ainsi, sur le cercle de Mohr de la figure 2 page 4, le point associé à l'angle  $\theta + \pi/2$  est opposé au point associé à l'angle  $\theta$  et a pour coordonnées  $(f, -e)$ . Le centre  $\Omega$  du cercle de Mohr est donc le milieu des deux points  $M_1(d, e)$  et  $M_2(f, -e)$ . On peut donc ensuite tracer le cercle de Mohr  $\mathcal{C}$ , de centre  $\Omega$  et passant par  $M_1$  et  $M_2$ . Enfin, d'après la construction géométrique de la question 1b, le cercle  $\mathcal{C}$  coupe l'axe des  $x$  aux points  $Q_1$  et  $Q_2$ , d'abscisses  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ , vérifiant (9). Enfin, d'après la construction géométrique de la question 1b, l'angle  $\theta$  est égal à  $\widehat{(Q_2 Q_1, Q_2 M_1')}$ .

Bref, la détermination de  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\theta$  à partir de  $d$ ,  $e$  et  $f$  se fait ainsi : (voir figure 3 page ci-contre) :

- On trace  $\Omega$ , le milieu de  $[M_1(d, e), M_2(f, -e)]$  ;
- On trace  $\mathcal{C}$ , le cercle de centre  $\Omega$  et passant par  $M_1$  et  $M_2$  ;
- $\mathcal{C}$  coupe l'axe des  $x$  en deux points  $Q_1$  et  $Q_2$ , d'abscisse  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  (vérifiant (9)) ;
- soit  $M_1'$  le symétrique de  $M_1$  par rapport à l'axe des  $x$  ;
- On trace la droite  $(Q_2 M_1')$  et on obtient  $\theta = \widehat{(Q_2 Q_1, Q_2 M_1')}$ .



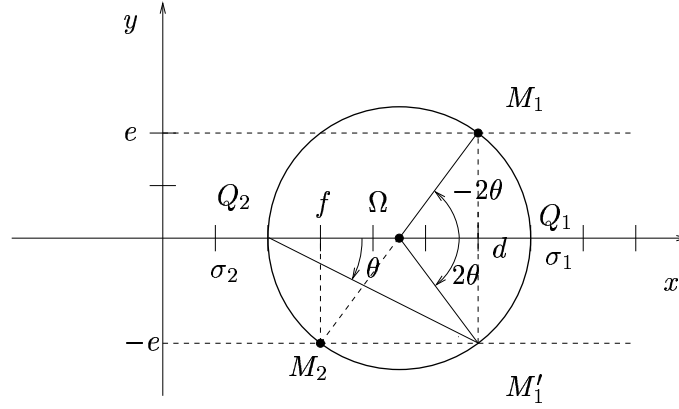


FIG. 3 – Détermination de  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\theta$  à partir de  $d$ ,  $e$  et  $f$ .

- (c) Traduisons de façon analytique la construction précédemment faite. En sommant (29a) et (29c), il vient donc

$$\sigma_1 + \sigma_2 = d + f. \quad (30)$$

On pose alors

$$\boxed{\Omega = \frac{d + f}{2}.} \quad (31)$$

On peut remarquer que  $\Omega$  est l'abscisse du centre du cercle  $\mathcal{C}$ . On a selon (29a), (29b) et (30)

$$d - \Omega = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \cos(2\theta), \quad (32)$$

$$e = \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1) \sin(2\theta). \quad (33)$$

En sommant le carré de (32) et de (33), on obtient

$$\sqrt{(d - \Omega)^2 + e^2} = \frac{1}{2}|\sigma_2 - \sigma_1|. \quad (34)$$

Ainsi, on peut poser

$$\boxed{R = \sqrt{(d - \Omega)^2 + e^2},} \quad (35)$$

et on a

$$\boxed{R \cos(-2\theta) = d - \Omega,} \quad (36)$$

$$\boxed{R \sin(-2\theta) = e.} \quad (37)$$

Enfin, d'après (9), (34) et (35), on a

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2R. \quad (38)$$



De (30) et (31), on déduit

$$\sigma_1 + \sigma_2 = 2\Omega. \quad (39)$$

On déduit par somme et différence de (38) et (39) que

$$\boxed{\sigma_1 = \Omega + R,} \quad (40)$$

$$\boxed{\sigma_2 = \Omega - R.} \quad (41)$$

On vérifierait l'implication dans l'autre sens.

- (d) Si  $d$ ,  $e$  et  $f$  sont connues, les égalités (31) et (35) permettent de déterminer  $R$  et  $\Omega$ ; les égalités (36) et (37) permettent de déterminer<sup>3</sup>  $\theta$ . Enfin, (40) et (41) fournissent  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ .

## 5. Application

- (a) Si on applique la méthode graphique de la question 4b à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad (42)$$

on constate que  $M_1(6,0)$  et  $M_2(3,0)$  appartiennent à l'axe des  $x$ . Ainsi  $Q_1 = M_1$ ,  $Q_2 = M_2$  et  $\theta = 0$ , soit

$$\boxed{\sigma_1 = 6, \quad \sigma_2 = 3, \quad \theta = 0.} \quad (43)$$

Cela est légitime puisque la matrice  $A$  est déjà diagonale.

On applique la méthode graphique de la question 4b à la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}. \quad (44)$$

On obtient alors la construction graphique de la figure 4.

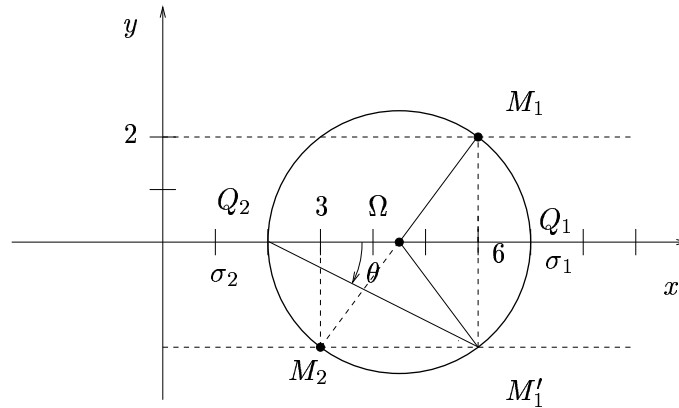


FIG. 4 – Construction graphique pour  $B$ .

On obtient graphiquement

$$\boxed{\sigma_1 \approx 7, \quad \sigma_2 \approx 2, \quad \theta \approx -26^\circ.} \quad (45)$$

<sup>3</sup>à  $\pi$  près; le changement de  $\theta$  en  $\theta + \pi$  intervertirait  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ .



- (b) Si  $A$  est définie par (42), on a  $d = 6$ ,  $e = 3$  et  $f = 0$ . Les équations (31), (35), (36), (37), (40) et (41) fournissent successivement :

$$\Omega = \frac{d+f}{2} = \frac{9}{2},$$

$$R = \sqrt{(d-\Omega)^2 + b^2} = \frac{3}{2},$$

et puisque

$$R \cos(-2\theta) = d - \Omega,$$

$$R \sin(-2\theta) = e,$$

il vient

$$\frac{3}{2} \cos(-2\theta) = \frac{3}{2},$$

$$\frac{3}{2} \sin(-2\theta) = 0.$$

On a donc

$$\theta = 0 \text{ ou } \theta = \pi.$$

Enfin,

$$\sigma_1 = \Omega + R = 6,$$

$$\sigma_2 = \Omega - R = 3.$$

Bref, on a

$$\boxed{\sigma_1 = 6, \quad \sigma_2 = 3, \quad \theta = 0.} \quad (46)$$

ce qui confirme (43).

De même, si  $B$  est définie par (44), on a  $d = 6$ ,  $e = 3$  et  $f = 2$ . Les équations (31), (35), (36), (37), (40) et (41) fournissent successivement :

$$\Omega = \frac{d+f}{2} = \frac{9}{2},$$

$$R = \sqrt{(d-\Omega)^2 + e^2} = \frac{5}{2},$$

et puisque

$$R \cos(-2\theta) = d - \Omega,$$

$$R \sin(-2\theta) = e,$$

il vient

$$\cos(-2\theta) = \frac{3}{5},$$

$$\sin(-2\theta) = \frac{4}{5}.$$



Ainsi (à  $\pi$  près),  $\theta$  appartient à  $[-\pi, 0]$  et on a donc

$$\theta = -\frac{1}{2} \arccos \left( \frac{3}{5} \right) \approx -26,56505^\circ.$$

Enfin,

$$\sigma_1 = \Omega + R = 7,$$

$$\sigma_2 = \Omega - R = 2.$$

Bref, on a

$$\boxed{\sigma_1 = 7, \quad \sigma_2 = 2, \quad \theta \approx -26,56505^\circ.} \quad (47)$$

ce qui confirme (45).

6. D'après le cours, les valeurs propres de  $A$  sont les racines du polynôme caractéristique de  $A$  :

$$\chi_A(x) = \det \begin{pmatrix} d-x & e \\ e & f-x \end{pmatrix} = x^2 - (d+f)x + df - e^2.$$

Ainsi, on vérifie facilement que les valeurs propres  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  de  $A$  (vérifiant (9)) sont données par

$$\boxed{\sigma_1 = \frac{d+f}{e} + \frac{1}{2} \sqrt{4e^2 + (d-f)^2},} \quad (48a)$$

$$\boxed{\sigma_2 = \frac{d+f}{e} - \frac{1}{2} \sqrt{4e^2 + (d-f)^2}.} \quad (48b)$$

Si on explicite les équations (31), (35), (40) et (41), il vient successivement, pour  $k \in \{1, 2\}$  :

$$\begin{aligned} \sigma_k &= \Omega \pm R, \\ &= \frac{d+f}{2} \pm \sqrt{(d-\Omega)^2 + e^2}, \\ &= \frac{d+f}{2} \pm \sqrt{\left(d - \frac{d+f}{2}\right)^2 + e^2}, \\ &= \frac{d+f}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(d-f)^2 + 4e^2}, \end{aligned}$$

ce qui est exactement (48).

7. Cette méthode a permis de diagonaliser à la main et de façon graphique une matrice d'ordre deux. Plus précisément, à la règle et au compas, nous avons résolu une équation polynômiale<sup>4</sup> de degré deux, à partir des valeurs (ici entières) des coefficients de la matrice étudiée.

Si on voulait diagonaliser graphiquement une matrice d'ordre trois, cela reviendrait donc à résoudre une équation polynômiale de degré trois, à la règle et au compas. Si les coefficients de la matrices sont entiers (ou plus précisément constructibles à la règle et au compas), il est impossible, dans le cas général, d'en déduire les racines d'une équation polynômiale de degré (voir le livre très bien fait [Car84]).

---

<sup>4</sup>puisque l'équation est  $P(x) = 0$  où  $P$  est le polynôme caractéristique de la matrice.



Par exemple, la matrice  $A$  définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

est à coefficients entiers ; ses valeurs propres sont données par

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{d}{6} + \frac{38}{3d} + \frac{2}{3}, \\ \lambda_2 &= -\frac{d}{12} - \frac{19}{3d} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2}i\sqrt{3} \left( \frac{d}{6} - \frac{38}{3d} \right), \\ \lambda_3 &= -\frac{d}{12} - \frac{19}{3d} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2}i\sqrt{3} \left( \frac{d}{6} - \frac{38}{3d} \right), \end{aligned}$$

où

$$d = \sqrt[3]{316 + 12i\sqrt{2355}}.$$

Ces trois racines sont les racines du polynôme caractéristique de  $A$  données par

$$P(x) = -1 + 5x + 2x^2 - x^3.$$

Naturellement, ces racines sont réelles puisque  $A$  est symétrique réelle. On peut vérifier que les expressions données (en fonction de la racine troisième, dans  $\mathbb{C}$  de  $316 + 12i\sqrt{2355}$ ) sont réelles. De plus, on admettra que ces trois racines ne sont pas constructibles à la règle et au compas (puisque'il faut extraire des racines troisièmes d'entiers).

On pourra vérifier cela en faisant tourner le petit le script matlab<sup>5</sup> fourni `matricetroissym`.

## Références

- [Bas68] J. Bass. *Exercices de mathématiques*. Masson, Paris, 1968. Disponible à la bibliothèque de l'UTBM sous la cote QA 43 BAS.
- [Bas03] Jérôme Bastien. Résistance des matériaux, Introduction aux calculs des structures. Notes de cours de MQ41 de l'UTBM, disponible sur le web : <http://utbmjb.cher.tiscali.fr/>, rubrique MQ41, 2003.
- [Car84] J.-C. Carrega. *Théorie des corps, la règle et le compas*. Hermann, 1984.
- [Duv90] G. Duvaut. *Mécanique des milieux continus*. Masson, Paris, 1990.

---

<sup>5</sup>c'est avec lui que j'ai trouvé ces valeurs, et non pas à la main ....