MT31 Automne 2002

Examen médian du 15 novembre 2002

Durée : deux heures

Une feuille A4 recto seul de notes autorisée - Calculatrice autorisée.

Exercice 1 (Calcul d'intégrales multiples)**.**
On considère la surface D de $\mathbb{R}^2$, définie comme un demi-cylindre de rayon R (voir figure 1).

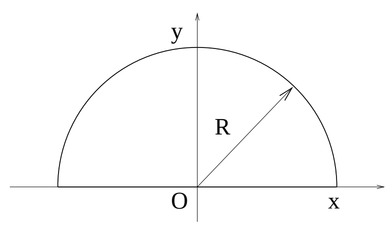

FIG. 1 – Le demi-cylindre étudié.

1. Quelle est l'aire de D ?
2. Calculer la position du centre de gravité de D, en supposant qu'elle représente une plaque homogène ? On utilisera les coordonnées polaires.
3. Calculer les inerties I_x et I_y de D par rapport à chacun des axes x et y. On utilisera de même les coordonnées polaires.

Exercice 2 (Gradient et rotationnel)**.**
Soit $V(x, y, x)$ le champ de vecteur défini en coordonnées cartésiennes par

$$V(x,y,z) = \begin{pmatrix} V_1(x,y,z) \\ V_2(x,y,z) \\ V_3(x,y,z) \end{pmatrix}$$

avec

$$V_1(x,y,z) = \frac{2x}{z}, \quad V_2(x,y,z) = -\frac{2y}{z}, \quad V_3(x,y,z) = \frac{y^2 - x^2}{z^2}.$$

1. Calculer $\nabla \wedge V$? Que peut on en déduire ?
2. Déterminer un champ scalaire ϕ tel que $\nabla\phi = V$.
3. Mêmes questions avec le champ vectoriel défini par

$$V_1(x,y,z) = 2xz, \quad V_2(x,y,z) = -2yz, \quad V_3(x,y,z) = y^2 - x^2.$$

Exercice 3 (Calcul différentiel et infinitésimal)**.**
On considère les vecteurs $u_r(r,\theta)$ et $u_\theta(r,\theta)$, les vecteurs locaux du système de coordonnées polaires (cf. figure 2).

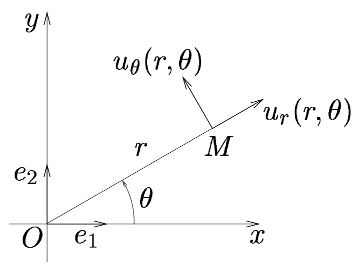

FIG. 2 – Les coordonnées polaires

1. Rappeler pourquoi on a :

$$u_r(r,\theta) = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2,$$
$$u_\theta(r,\theta) = -\sin\theta e_1 + \cos\theta e_2.$$

2. On considère maintenant que u_r et u_θ sont deux fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Montrer que, si on applique aux vecteurs, les règles de dérivation usuelles, on a

$$\frac{\partial u_r(r,\theta)}{\partial r} = 0, \tag{1}$$
$$\frac{\partial u_\theta(r,\theta)}{\partial r} = 0, \tag{2}$$
$$\frac{\partial u_r(r,\theta)}{\partial \theta} = u_\theta(r,\theta), \tag{3}$$
$$\frac{\partial u_\theta(r,\theta)}{\partial \theta} = -u_r(r,\theta). \tag{4}$$

3. Justifier que si dr et $d\theta$ sont «petits», alors

$$u_r(r+dr,\theta+d\theta) \approx u_r(r,\theta) + \frac{\partial u_r(r,\theta)}{\partial r}dr + \frac{\partial u_r(r,\theta)}{\partial \theta}d\theta, \tag{5}$$
$$u_\theta(r+dr,\theta+d\theta) \approx u_\theta(r,\theta) + \frac{\partial u_\theta(r,\theta)}{\partial r}dr + \frac{\partial u_\theta(r,\theta)}{\partial \theta}d\theta. \tag{6}$$

4. En déduire que

$$u_r(r+dr,\theta+d\theta) \approx u_r(r,\theta) + u_\theta(r,\theta)d\theta, \tag{7}$$
$$u_\theta(r+dr,\theta+d\theta) \approx u_\theta(r,\theta) - u_r(r,\theta)d\theta. \tag{8}$$

5. En déduire, si dr et $d\theta$ sont «petits», une expression de :
$$\overrightarrow{OM}(r + dr, \theta + d\theta) - \overrightarrow{OM}(r, \theta).$$
On rappelle que $\overrightarrow{OM}(r, \theta) = ru_r(r, \theta)$. Dans l'expression obtenue, on ne conservera que les termes du premier ordre en dr et $d\theta$ (c'est-à-dire que les termes de degré deux sont négligeables devant ceux de degré un, si dr et $d\theta$ sont «petits»).
6. Quelle relation du cours retrouve-t-on ?