MT31 Automne 2003

Examen médian du 14 novembre 2003

Durée : deux heure(s)

Une feuille A4 recto seul de notes autorisée - Calculatrice autorisée.

Exercice 1 (Calcul de gradients et de rotationnels).
On rappelle, pour cet exercice, les expressions du gradient et du rotationnel vues en cours, pour un système de coordonnées (s_1, s_2, s_3) :

$$\nabla f(s_1, s_2, s_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu_1} \\ \frac{1}{\mu_2} \\ \frac{1}{\mu_3} \end{pmatrix} * \nabla_s f,$$

et

$$\nabla \wedge V(s_1, s_2, s_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu_2\mu_3} \\ \frac{1}{\mu_3\mu_1} \\ \frac{1}{\mu_1\mu_2} \end{pmatrix} * \left(\begin{pmatrix} \frac{\partial}{ds_1} \\ \frac{\partial}{ds_2} \\ \frac{\partial}{ds_3} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \mu_1 V_1 \\ \mu_2 V_2 \\ \mu_3 V_3 \end{pmatrix} \right).$$

On rappelle aussi les expressions des multiplicateurs μ_i en cylindriques :

$$\mu_1 = 1, \quad \mu_2 = r, \quad \mu_3 = 1.$$

On considère dans cet exercice, la fonction ϕ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\phi(x, y, z) = 2e^{-\left(x^2+y^2\right)} \frac{xy}{x^2 + y^2}. \tag{1}$$

1. Exprimer ϕ en coordonnées cylindriques et en déduire l'expression de $V = \nabla\phi$.
2. Déterminer l'expression de $\nabla \wedge V$ et vérifier que l'on retrouve la propriété vue en cours.

Exercice 2 (Calcul d'intégrales multiples).
Le but de cet exercice est de déterminer la position des centres de gravité et les moments d'inertie quadratiques pour les surfaces planes homogènes représentées sur la figure 1.

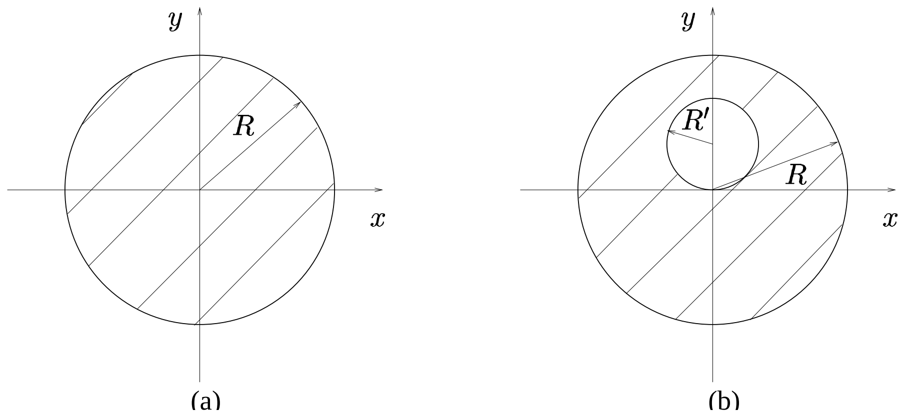

FIG. 1 – Surface circulaire pleine de rayon R (figure (a)) et surface circulaire creuse, définie par les rayons R et R' (figure (b)).

Pour tout cet exercice, on note :

$\mathcal{D}$, le disque de centre $(0,0)$ et de rayon R,

$\mathcal{D}'$, le disque de centre $(0,R')$ et de rayon R',

$\widetilde{\mathcal{D}}$, le disque $\mathcal{D}$ ôté du disque $\mathcal{D}'$.

1. Déterminer, sans calculs, les coordonnées (x_G, y_G) du centre de gravité de $\mathcal{D}$ (voir la figure 1a) dans le repère représenté.
2. (a) Déterminer, sans calculs, l'abscisse x_G du centre de gravité de $\widetilde{\mathcal{D}}$ (voir figure 1b) dans le repère représenté.

   (b) Pourquoi le centre de gravité de $\widetilde{\mathcal{D}}$ peut-il être considéré comme le centre de gravité du point de coordonnées $(0,0)$ affecté du coefficient πR^2 et du point de coordonnées $(0,R')$ affecté du coefficient $-\pi R'^2$? En déduire que l'ordonnée y_G du centre de gravité de $\widetilde{\mathcal{D}}$ dans le repère représenté est égale à

$$y_G = -\frac{R'^3}{R^2 - R'^2}. \tag{2}$$

3. Montrer, en utilisant les coordonnées polaires, que les moments quadratiques I_x et I_y (par rapport aux axes x et y) de $\mathcal{D}$ vérifient

$$I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{4}. \tag{3}$$

   On rappelle que

$$I_x = \iint_{\mathcal{D}} y^2 dxdy \text{ et } I_x = \iint_{\mathcal{D}} x^2 dxdy.$$

4. Dans cette question, on cherche à déterminer les moments quadratiques I_x et I_y (par rapport aux axes x et y) de $\widetilde{\mathcal{D}}$.
   (a) Déterminer, en utilisant le théorème de Huygens, I_x, le moment quadratique de la surface $\mathcal{D}'$ par rapport à l'axe x.
   (b) En déduire que le moment quadratique de la surface $\widetilde{\mathcal{D}}$ par rapport à l'axe x vérifie

$$I_x = \frac{\pi R^4}{4} - \frac{5\pi R'^4}{4}. \tag{4}$$

   On écrira pour cela que

$$I_x = \iint_{\mathcal{D}} y^2 dxdy - \iint_{\mathcal{D}'} y^2 dxdy.$$

5. Déterminer, comme dans la question 4, I_y, le moment quadratique de la surface $\widetilde{\mathcal{D}}$ par rapport à l'axe y.
6. **Question facultative**

   Peut-on retrouver les résultats des questions 4 et 5, sans utiliser le théorème de Huygens ?

Exercice 3 (Intégrales curvilignes)**.**
L'objet de ce petit problème est de donner un sens mathématique aux intégrales curvilignes, de façon un peu plus précise que pour les exemples vus en cours.
Pour tout ce problème, on supposera que l'on travaille dans le plan[1].
On rappelle qu'un arc paramétré Γ est une courbe du plan, définie de la façon suivante : on se donne $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et x et y deux fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On a alors

$$\Gamma = \left\{ \big(x(t), y(t)\big) : t \in [a, b] \right\}. \tag{5}$$

Autrement dit, à chaque valeur de $t \in [a, b]$, on associe un point M de Γ de coordonnées $\big(x(t), y(t)\big)$ (voir figure 2). On suppose que la courbe Γ est décrite une seule fois, dans le sens des t croissants.
Les fonctions x et y définissent donc un paramétrage de Γ. On appelle $A = \big(x(a), y(a)\big)$ et $B = \big(x(a), y(a)\big)$ les extrémités de Γ.
Soit maintenant une fonction f une fonction continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
On **définit l'intégrale curviligne de** f **sur** Γ comme étant l'intégrale :

$$I = \int_a^b f\big(x(t), y(t)\big) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt, \tag{6}$$

et on la **note**

$$I = \int_\Gamma f(x, y) ds. \tag{7}$$

On admet que cette intégrale est indépendante du paramétrage choisi.
Nous allons donner un sens «concret» à cette intégrale et en donner les propriétés.

1. (a) Soient $t \in [a, b]$, $M = \big(x(t), y(t)\big)$ un point de Γ, dt une variation infinitésimale du paramètre t, et $M' = \big(x(t + dt), y(t + dt)\big)$ un point de Γ, «infiniment proche» de M.

[1] Dans l'espace, les résultats sont identiques.

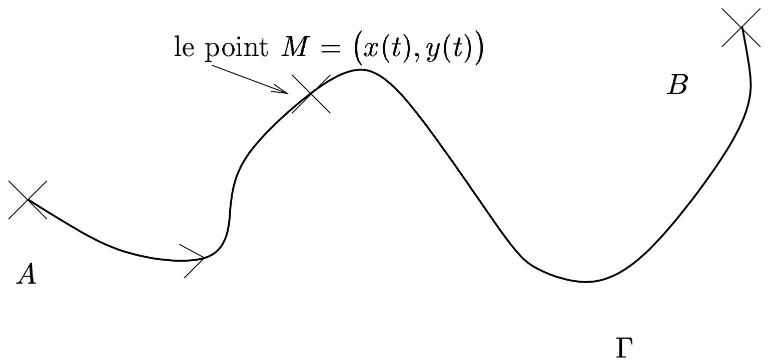

FIG. 2 – Un arc paramétré Γ.

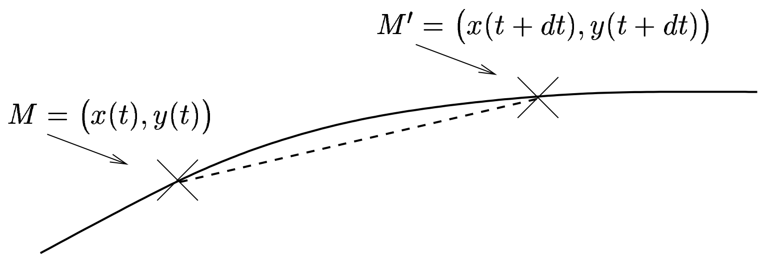

FIG. 3 – Les points M et M' de Γ.

On appelle ds la longueur (infinitésimale) de la portion de courbe comprise entre M et M'. En assimilant cette portion de courbe au vecteur $\overrightarrow{MM'}$ (voir figure 3), montrer que, au premier ordre près en dt,

$$ds = \sqrt{\big(x(t+dt) - x(t)\big)^2 + \big(y(t+dt) - y(t)\big)^2}. \tag{8}$$

(b) En déduire que, au premier ordre près en dt,

$$ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt. \tag{9}$$

(c) Justifier alors la notation (7).

2. Si $f = 1$, que représente l'intégrale

$$I = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt \ ? \tag{10}$$

On pourra s'aider du fait que, avec la notation (7), cette intégrale est aussi notée :

$$I = \int_\Gamma ds. \tag{11}$$

3. Imaginons maintenant un point matériel M, soumis à une force $\overrightarrow{F}$ et ayant un déplacement élémentaire $\overrightarrow{dl}$. On rappelle que le travail élémentaire de la force pour ce déplacement élémentaire est :

$$dW = \overrightarrow{F}.\overrightarrow{dl}. \tag{12}$$

Supposons que ce point matériel décrive un arc de courbe Γ, paramétré par $x(t), y(t)$ (où ici $t \in [a, b]$ représente le temps). On suppose que $\overrightarrow{F}$ est un champ de vecteur, défini en tout point du plan, avec

$$\overrightarrow{F}(x, y) = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Le travail de la particule dans le champ de vecteur $\overrightarrow{F}$ est égal à

$$W_\Gamma = \int_\Gamma dW = \int_\Gamma \overrightarrow{F}.\overrightarrow{dl} \tag{14}$$

(a) Montrer que, au premier ordre près en dt,

$$\overrightarrow{dl} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} dt. \tag{15}$$

(b) En déduire que

$$\int_\Gamma \overrightarrow{F}.\overrightarrow{dl} = \int_\Gamma \Big(P\big(x(t), y(t)\big) x'(t) + Q\big(x(t), y(t)\big) y'(t) \Big)\, dt. \tag{16}$$

4. On rappelle qu'en tout point de Γ le vecteur unitaire tangent $T(t)$ à la courbe a pour composantes

$$T(t) = \frac{1}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Déduire de (16) et (17) que, en utilisant (8),

$$\int_\Gamma \overrightarrow{F}.\overrightarrow{dl} = \int_\Gamma \overrightarrow{F}.\overrightarrow{T}\, ds. \tag{18}$$

5. En déduire que «W, le travail de la particule dans le champ de vecteur $\overrightarrow{F}$, est égal à l'intégrale curviligne de $\overrightarrow{F}.T$ sur Γ» et est égal à

$$I = \int_a^b \Big(P\big(x(t), y(t)\big) x'(t) + Q\big(x(t), y(t)\big) y'(t) \Big)\, dt. \tag{19}$$

Cette intégrale est appelée la circulation du champ de vecteur $\overrightarrow{F}$ le long de l'arc Γ et est notée

$$\mathcal{T}_{\widehat{AB}}(F) = \int_\Gamma \overrightarrow{F}.\overrightarrow{T}\, ds, \tag{20}$$

ou, selon (16),

$$\mathcal{T}_{\widehat{AB}}(F) = \int_\Gamma \overrightarrow{F}.\overrightarrow{dl}. \tag{21}$$

6. **Application**

Calculer la circulation du champ de vecteur de composantes

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x+1 \end{pmatrix},$$

le long de la courbe Γ définie et orientée comme sur la figure 4 ; les points A et B ont pour coordonnées respectives $(1,0)$ et $(0,1)$. La courbe Γ est la réunion du segment $[0A]$, du quart de

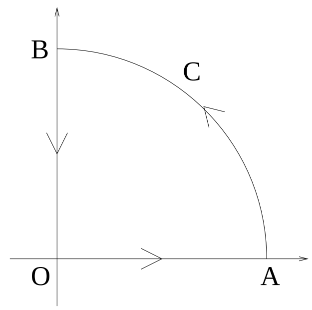

FIG. 4 – La courbe Γ.

cercle C et du segment $[B0]$, que l'on paramétrera par

$$\begin{array}{lcl} [OA] & : & x(t) = t, \quad y(t) = 0, \text{ avec } t \in [0,1], \\ C & : & x(t) = \cos t, \quad y(t) = \sin t \text{ avec } t \in [0, \pi/2], \\ [BO] & : & x(t) = 0, \quad y(t) = t, \text{ avec } t \in [1,0]. \end{array}$$

On utilisera la formule (19), où l'intégrale sera découpée en trois.

7. **Question facultative**

Démontrer que si un champ de vecteur F dérive d'un potentiel ϕ (c'est-à-dire $F = \nabla\phi$), alors la circulation de F le long d'un arc Γ d'extrémité A et B est égale à $\phi(B) - \phi(A)$.