MT31 Automne 2004

Examen médian du 12 novembre 2004

Durée : deux heure(s)

Une feuille A4 recto seul de notes autorisée – Calculatrice autorisée.

Tout résultat pourra être admis. – On rédigera sur une copie (ou plus) les exercices 1 et 2 et sur une autre les exercices 3 et 4.

Exercice 1 (Dérivées)**.**
Calculer la dérivée de la fonction

$$g(x) = \frac{\sqrt{2}x^2}{2\sqrt{x^4 - 2x^2 + 2}}.$$

Exercice 2 (Dérivées, «Deuxième»)**.**
Nous considérons la fonction $f_n(x) = x^{n-1} \ln x$, définie pour $n \geq 0$.

1. Calculer la dérivée de la fonction f_n.
2. **Question bonus**

   Montrer que, pour $n \geq 1$, la dérivée n-ième de f_n est égale à :

$$f_n^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{x}.$$

Exercice 3 (Un peu de topographie)**.**

1. Tracer sur votre copie quelques ligne de niveaux d'une carte de topographie :
   - d'une pyramide régulière de base rectangulaire ;
   - d'un cône dont la pointe est tournée vers le haut et dont la base est un cercle ;
   - du sommet du Ballon d'Alsace (pour lequel on supposera que, plus on se rapproche du sommet, moins la pente est importante) ;
   - du Pic du Midi (pour lequel on supposera que, plus on se rapproche du sommet, plus la pente est importante).
2. Sur les figures, tracer les quatre sommets.
3. On appelle g la fonction qui, à chaque point de coordonnées (x, y) de ces cartes, associe l'altitude $z = g(x, y)$. Sur les figures déjà faites, tracer quelques gradients de g de cette fonction, de façon qualitative.

   Existe-t-il des endroits où le gradient de g n'est pas défini ?

Exercice 4 (Calcul de gradient et de rotationnel en sphériques)**.**
Dans cet exercice, on travaillera uniquement en coordonnées sphériques.

1. On rappelle que les multiplicateurs μ_i sont définis en coordonnées sphériques ($s_1 = r, s_2 = \theta, s_3 = \phi$) par

$$\mu_1 = 1, \quad \mu_2 = r\cos\phi, \quad \mu_3 = r.$$

   À partir des expressions générales du gradient et du rotationnel :

$$\nabla f(s_1, s_2, s_3) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\mu_1} \\ \\ \dfrac{1}{\mu_2} \\ \\ \dfrac{1}{\mu_3} \end{pmatrix} * \nabla_s f \quad \text{et} \quad \nabla \wedge V(s_1, s_2, s_3) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\mu_2\mu_3} \\ \\ \dfrac{1}{\mu_3\mu_1} \\ \\ \dfrac{1}{\mu_1\mu_2} \end{pmatrix} * \left(\nabla_s \wedge \begin{pmatrix} \mu_1 V_1 \\ \\ \mu_2 V_2 \\ \\ \mu_3 V_3 \end{pmatrix} \right),$$

   retrouver les expressions du gradient et du rotationnel en coordonnées sphériques

$$\nabla f(r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial r} \\ \\ \dfrac{1}{r\cos\phi}\dfrac{\partial f}{\partial \theta} \\ \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial \phi} \end{pmatrix},$$

   et

$$\nabla \wedge V(r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{r\cos\phi}\left(\dfrac{\partial}{\partial \theta}(V_\phi) - \dfrac{\partial}{\partial \phi}(\cos\phi V_\theta)\right) \\ \\ \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial}{\partial \phi}(V_r) - \dfrac{\partial}{\partial r}(r V_\phi)\right) \\ \\ \dfrac{1}{r\cos\phi}\left(\dfrac{\partial}{\partial r}(r\cos\phi V_\theta) - \dfrac{\partial}{\partial \theta}(V_r)\right) \end{pmatrix}.$$

2. On donne le champ vectoriel V défini en sphérique par

$$V(r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} 2\left(1 + \cos^2\phi\right) r \\ 0 \\ -2r\cos\phi\sin\phi \end{pmatrix}. \tag{1}$$

   Calculer le rotationnel de V. Que peut-on en déduire ?

3. On cherche à déterminer un champ scalaire f tel que

$$V = \nabla f. \tag{2}$$

   (a) Pourquoi f ne dépend que de r et de ϕ ?

(b) Montrer qu'il existe $f_1(\phi)$ tel que

$$f(r,\phi) = \left(1+\cos^2\phi\right) r^2 + f_1(\phi). \tag{3}$$

(c) En déduire l'expression de f.