Corrigé de l'examen médian du 15 novembre 2002

Correction de l'exercice 1.

1. Il est clair que

$$\boxed{S = \frac{1}{2}\pi R^2.} \tag{1}$$

2. Les coordonnées du centre de gravité G sont données par

$$x_G = \frac{1}{S}\iint_D x dx dy,$$
$$y_G = \frac{1}{S}\iint_D y dx dy.$$

En coordonnées polaires, D est défini par $r \in [0, R]$ et $\theta \in [0, \pi]$. On a, compte tenu du changement de variable en polaire $x = r\cos\theta$ et $dxdy = rdrd\theta$. Ainsi,

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{1}{S}\iint_{\substack{r\in[0,R]\\ \theta\in[0,\pi]}} r\cos\theta \times rdrd\theta, \\ &= \frac{1}{S}\iint_{\substack{r\in[0,R]\\ \theta\in[0,\pi]}} r^2\cos\theta\, drd\theta, \end{aligned}$$

et puisque l'on peut dissocier r^2 et $\cos\theta$,

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{S}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\cos\theta d\theta \int_{r=0}^{r=R} r^2 dr, \\ &= 0. \end{aligned}$$

Cette propriété était prévisible puisque D est symétrique par rapport à l'axe y. De même, on a, puisque $y = r\sin\theta$,

$$\begin{aligned}
y_G &= \frac{1}{S} \iint\limits_{\substack{r\in[0,R]\\ \theta\in[0,\pi]}} r\sin\theta \times r dr d\theta,\\
&= \frac{1}{S} \iint\limits_{\substack{r\in[0,R]\\ \theta\in[0,\pi]}} r^2 \sin\theta\, r dr d\theta,\\
&= \frac{1}{S} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \sin\theta d\theta \int_{r=0}^{r=R} r^2 dr,\\
&= \frac{1}{S} 2 \times \frac{R^3}{3},\\
&= \frac{4R}{3\pi},
\end{aligned}$$

quantité qui est comprise entre 0 et R (puisque le centre de gravité est à l'intérieur de la plaque). Bref,

$$\boxed{\begin{aligned} x_G &= 0,\\ y_G &= \frac{4R}{3\pi}. \end{aligned}}$$

3. De la même façon, on calcule

$$\begin{aligned}
I_x &= \iint\limits_{D} y^2 dx dy,\\
&= \iint\limits_{\substack{r\in[0,R]\\ \theta\in[0,\pi]}} r^2 \sin^2\theta r dr d\theta,\\
&= \int_0^\pi \sin^2\theta d\theta \times \int_0^R r^3 dr.
\end{aligned}$$

On linéarise le carré du sinus :

$$\sin^2\theta = \frac{1}{2}\left(1 - \cos 2\theta\right).$$

Ainsi

$$I_x = \frac{R^4}{4}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi R^4}{8}.$$

De même,

$$I_y = \int_0^\pi \cos^2\theta d\theta \times \int_0^R r^3 dr = \frac{R^4}{4}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi R^4}{8}.$$

Ainsi,

$$\boxed{I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{8}.}$$

Correction de l'exercice 2.

1. Il est aisé de constater que le rotationnel de V est nul, d'où on déduit, d'après un théorème du cours qu'il existe un champ scalaire ϕ tel que $\nabla\phi = V$.
2. Pour le déterminer, on utilise la méthode vue en TD. On écrit
$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = V_1 = \frac{2x}{z},$$
et donc, par intégration, par rapport à x, on a
$$\phi(x,y,z) = \frac{x^2}{z} + \phi_1(y,z), \tag{2}$$
où ϕ_1 ne dépend que de y et de z. On réitère :
$$-\frac{2y}{z} = V_2 = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{z} + \phi_1(y,z)\right) = \frac{\partial \phi_1}{\partial y}.$$
Ainsi
$$\frac{\partial \phi_1}{\partial y} = -\frac{2y}{z},$$
et donc, par intégration, par rapport à y, on a
$$\phi_1(y,z) = -\frac{y^2}{z} + \phi_2(z),$$
où ϕ_2 ne dépend que de z. On réinjecte cela dans (2) :
$$\phi(x,y,z) = \frac{x^2}{z} - \frac{y^2}{z} + \phi_2(z). \tag{3}$$
On réitère :
$$\frac{y^2-x^2}{z^2} = V_3 = \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x^2}{z} - \frac{y^2}{z} + \phi_2(z)\right) = \frac{y^2-x^2}{z^2} + \phi_2'(z),$$
et donc, par intégration, par rapport à z, on a
$$\phi_2(z) = C,$$
où C est une constante. On réinjecte cela dans (3) :
$$\boxed{\phi(x,y,z) = \frac{x^2-y^2}{z} + C.}$$
3. On vérifie aisément que le rotationnel de V est égal à :
$$\nabla \wedge V(x,y,z) = 4\begin{pmatrix} y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   Ce champ de vecteur est non nul (sauf en zéro) et V n'est pas le gradient d'un potentiel scalaire.

Correction de l'exercice 3.

1. C'est un résultat de cours, qui provient de (avec $r = \sqrt{x^2 + y^2}$)

$$
\begin{aligned}
u_r(r,\theta) &= \frac{\overrightarrow{OM}}{OM}, \\
&= \frac{xe_1 + ye_2}{r}, \\
&= \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2.
\end{aligned}
$$

   Par une rotation d'angle $\pi/2$, on en déduit l'expression de $u_\theta(r,\theta)$.

2. Dérivons l'expressions de $u_r(r,\theta)$ par rapport à r : puisque e_1 et e_2 ne dépendent pas de r et de θ, on a donc

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u_r(r,\theta)}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\theta e_1 + \sin\theta e_2\right), \\
&= \frac{\partial \cos\theta}{\partial r} e_1 + \frac{\partial \sin\theta}{\partial r} e_2, \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

   De même, on a

$$
\frac{\partial u_\theta(r,\theta)}{\partial r} = 0.
$$

   On a aussi

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u_r(r,\theta)}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\cos\theta e_1 + \sin\theta e_2\right), \\
&= \frac{\partial \cos\theta}{\partial \theta} e_1 + \frac{\partial \sin\theta}{\partial \theta} e_2, \\
&= -\sin\theta e_1 + \cos\theta e_2, \\
&= u_\theta(r,\theta).
\end{aligned}
$$

   De même, on a

$$
\frac{\partial u_\theta(r,\theta)}{\partial \theta} = -u_r(r,\theta).
$$

3. On rappelle que si f est une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, d'après le cours sur la différentielle,

$$
f(r+dr,\theta+d\theta) \approx \frac{\partial f(r,\theta)}{\partial r} dr + \frac{\partial f(r,\theta)}{\partial r} d\theta.
$$

   Si on applique ce résultat aux deux fonctions u_r et u_θ, fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, il vient (en admettant que cela garde un sens, ce qui est vrai) :

$$
\boxed{
\begin{aligned}
u_r(r+dr,\theta+d\theta) &\approx u_r(r,\theta) + \frac{\partial u_r(r,\theta)}{\partial r} dr + \frac{\partial u_r(r,\theta)}{\partial \theta} d\theta, \\
u_\theta(r+dr,\theta+d\theta) &\approx u_\theta(r,\theta) + \frac{\partial u_\theta(r,\theta)}{\partial r} dr + \frac{\partial u_\theta(r,\theta)}{\partial \theta} d\theta.
\end{aligned}
}
\tag{4}
$$

4. Si on réinjecte les résultats de la question 2 dans (4), il vient donc

$$\boxed{\begin{array}{l} u_r(r+dr,\theta+d\theta) \approx u_r(r,\theta)+u_\theta(r,\theta)d\theta, \\ \\ u_\theta(r+dr,\theta+d\theta) \approx u_\theta(r,\theta)-u_r(r,\theta)d\theta. \end{array}} \tag{5}$$

5. On a, par définition, et compte tenu de (5),

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM}(r+dr,\theta+d\theta)-\overrightarrow{OM}(r,\theta) &= (r+dr)u_r(r+dr,\theta+d\theta)-ru_r(r,\theta),\\ &= (r+dr)\big(u_r(r,\theta)+u_\theta(r,\theta)d\theta\big)-ru_r(r,\theta),\\ &= ru_r(r,\theta)+dru_r(r,\theta)+rd\theta u_\theta(r,\theta)+drd\theta u_\theta(r,\theta)-ru_r(r,\theta),\\ &= dru_r(r,\theta)+rd\theta u_\theta(r,\theta)+drd\theta u_\theta(r,\theta).\end{aligned}$$

Puisque l'on ne conserve que les termes du premier ordre en dr et $d\theta$, on peut donc négliger $drd\theta$ devant dr et $d\theta$; ainsi

$$\boxed{\overrightarrow{OM}(r+dr,\theta+d\theta)-\overrightarrow{OM}(r,\theta) = dru_r(r,\theta)+rd\theta u_\theta(r,\theta).} \tag{6}$$

Remarque 1. En fait, de façon analogue à ce que l'on a vu en cours pour des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, on a

$$\overrightarrow{OM}(r+dr,\theta+d\theta)-\overrightarrow{OM}(r,\theta) = dru_r(r,\theta)+rd\theta u_\theta(r,\theta)+o\left(\sqrt{dr^2+d\theta^2}\right).$$

6. Le vecteur $\overrightarrow{OM}(r+dr,\theta+d\theta)-\overrightarrow{OM}(r,\theta)$ représente la variation du point M de coordonnées (r,θ) quand les coordonnées polaires varient de (r,θ) à $(r+dr,\theta+d\theta)$ avec dr et $d\theta$ «petits». C'est donc l'expression du déplacement élémentaire $d\overrightarrow{OM}$. On retrouve donc

$$\boxed{d\overrightarrow{OM} = dru_r(r,\theta)+rd\theta u_\theta(r,\theta),} \tag{7}$$

c'est-à-dire, avec les notations du cours, les expressions des multiplicateurs μ_1 et μ_2 :

$$\boxed{d\overrightarrow{OM} = dru_r(r,\theta)+rd\theta u_\theta(r,\theta) = \mu_1 dru_r(r,\theta)+\mu_2 d\theta u_\theta(r,\theta),} \tag{8}$$

et donc

$$\boxed{\mu_1 = 1, \quad \mu_2 = r.} \tag{9}$$