

Corrigé de l'examen médian du 14 novembre 2003

Erratum pour l'exercice 1

Dans la version donnée le jour du médian (corrigée depuis pour archivage) une malheureuse erreur d'énoncé a été commise : il fallait lire

$$\phi(x, y, z) = 2e^{-(x^2+y^2)} \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad (1)$$

au lieu de

$$\phi(x, y, z) = 2e^{-(x^2+y^2+z^2)} \frac{xy}{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (2)$$

Je bats ma coulpe!!!!

Dans le cas (2), les calculs sont beaucoup plus difficile à mener puisque, en coordonnées cylindriques, le terme $x^2 + y^2 + z^2$ est égal à $r^2 + z^2$ et ne simplifie pas.

On consultera la correction manuscrite distribuée avec des essais (infructueux) de calculs. J'ai essayé de calculer, en cylindrique et en sphérique, le gradient de la fonction ϕ (notée ψ en sphérique pour éviter la confusion avec ϕ). Cependant, on pourra tout de même consulter les script matlab fournis `calculcylindrique` et `calculspherique`. Ces deux script déterminent, grâce au calcul symbolique, le gradient de la fonction ϕ définie par (2) et permettent de montrer que le rotationnel du gradient est bien nul.

En coordonnées cylindriques, on a

$$\phi(x, y, z) = 2e^{-(x^2+y^2+z^2)} \frac{xy}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{r^2}{u} e^{-u} \sin 2\theta,$$

où $u = r^2 + z^2$. Dans ce cas, on peut vérifier, grâce au script `calculcylindrique` que

$$\nabla\phi(r, \theta, z) = \begin{pmatrix} -2 \frac{r e^{-r^2-z^2} \sin(2\theta) (-z^2 + r^4 + r^2 z^2)}{r^4 + 2 r^2 z^2 + z^4} \\ 2 \frac{r e^{-r^2-z^2} \cos(2\theta)}{r^2 + z^2} \\ -2 \frac{r^2 e^{-r^2-z^2} \sin(2\theta) z (1 + r^2 + z^2)}{r^4 + 2 r^2 z^2 + z^4} \end{pmatrix},$$

puis que

$$\nabla \wedge (\nabla\phi(r, \theta, z)) = 0.$$

En coordonnées sphériques, on a

$$\psi(x, y, z) = 2e^{-(x^2+y^2+z^2)} \frac{xy}{x^2+y^2+z^2} = e^{-r^2} \cos^2 \phi \sin 2\theta.$$

Dans ce cas, on peut vérifier, grâce au script `calculspherique` que

$$\nabla \psi(r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} -2re^{-r^2} \cos^2(\phi) \sin(2\theta) \\ 2 \frac{e^{-r^2} \cos(\phi) \cos(2\theta)}{r} \\ -2 \frac{e^{-r^2} \cos(\phi) \sin(2\theta) \sin(\phi)}{r} \end{pmatrix},$$

puis que

$$\nabla \wedge (\nabla \psi(r, \theta, \phi)) = 0.$$

Vous trouverez ci-dessus la correction de l'exercice corrigé, pour lequel ϕ est définie par (1).

Correction de l'exercice 1.

1. En coordonnées cylindriques, on a $x^2 + y^2 = r^2$, $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$; ainsi

$$\frac{xy}{x^2 + y^2} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \frac{x}{r} \frac{y}{r} = \cos \theta \sin \theta.$$

Ainsi, il vient, en écrivant $2 \cos \theta \sin \theta = \sin(2\theta)$

$$\boxed{\phi(r, \theta, z) = e^{-r^2} \sin(2\theta)}. \quad (3)$$

Puisque

$$\nabla \phi(r, \theta, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix}$$

on a donc, après calculs,

$$\boxed{V(r, \theta, z) = \nabla \phi(r, \theta, z) = \begin{pmatrix} -2re^{-r^2} \sin(2\theta) \\ 2e^{-r^2} \cos(2\theta)/r \\ 0 \end{pmatrix}} \quad (4)$$

2. En utilisant l'expression générale du rotationnel de V et en écrivant que $\partial/\partial z = 0$ et que $V_z = 0$, il vient

$$\nabla \wedge V(r, \theta, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r}(rV_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta}(V_r) \right) \end{pmatrix}$$

On calcule

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r}(rV_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta}(V_r) \right) &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(2e^{-r^2} \cos(2\theta) \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(-2re^{-r^2} \sin(2\theta) \right) \right) \\ &= \frac{1}{r} \left(\cos(2\theta) \left(-4re^{-r^2} \right) + 4re^{-r^2} \cos(2\theta) \right) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\boxed{\nabla \wedge V = 0.} \quad (5)$$

On vient donc de retrouver que

$$\boxed{\nabla \wedge (\nabla \phi) = \nabla \wedge V = 0.} \quad (6)$$

Correction de l'exercice 2.

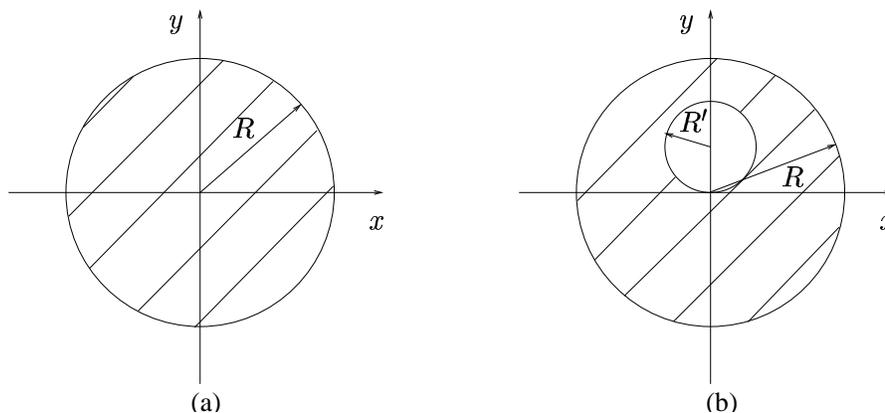


FIG. 1 – Surface circulaire pleine de rayon R (figure (a)) et surface circulaire creuse, définie par les rayons R et R' (figure (b)).

1. Puisque la surface de la figure 1a est symétrique par rapport aux axes x et y , on a

$$\boxed{x_G = y_G = 0.} \quad (7)$$

2. (a) Puisque la surface de la figure 1b est symétrique par rapport à l'axe x , on a

$$\boxed{x_G = 0.} \quad (8)$$

- (b) Puisque $\tilde{\mathcal{D}}$ désigne le disque \mathcal{D} ôté du disque \mathcal{D}' , on peut en déduire, par associativité du barycentre, que le centre de gravité de $\tilde{\mathcal{D}}$ est le barycentre du centre de gravité de \mathcal{D} , affecté d'un poids égal à la surface de \mathcal{D} et centre de gravité de \mathcal{D}' , affecté d'un poids égal à l'opposé de la surface de \mathcal{D} (poids négatif!), soit encore, du point 0 de coordonnées $(0, 0)$ affecté du coefficient πR^2 et du point B de coordonnées $(0, R')$ affecté du coefficient $-\pi R'^2$; on en déduit donc

$$y_G = \frac{0 \times \pi R^2 - R' \times \pi R'^2}{\pi R^2 - \pi R'^2},$$

soit encore

$$\boxed{y_G = -\frac{R'^3}{R^2 - R'^2}}. \quad (9)$$

Remarque 1. On peut aussi démontrer cela d'une autre façon : d'après le cours,

$$y_G = \frac{1}{\tilde{\mathcal{D}}} \iint_{\tilde{\mathcal{D}}} y dx dy = \frac{1}{\tilde{\mathcal{D}}} \left(\iint_{\mathcal{D}} y dx dy - \iint_{\mathcal{D}'} y dx dy \right).$$

La première intégrale est l'ordonnée du centre de gravité de \mathcal{D} , qui est nulle. On décrit \mathcal{D}' en coordonnées polaires, par rapport à son centre de gravité :

$$(x, y) \in \mathcal{D}' \iff x = r \cos \theta \text{ et } y = r \sin \theta + R' \text{ où } r \in [0, R'] \text{ et } \theta \in [0, 2\pi]. \quad (10)$$

Ainsi, on a

$$y_G = -\frac{1}{\tilde{\mathcal{D}}} \iint_{\mathcal{D}'} y dx dy = -\frac{1}{\tilde{\mathcal{D}}} \iint_{\substack{0 \leq r \leq R' \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi}} (r \sin \theta + R') r dr d\theta. \quad (11)$$

On peut montrer que

$$y_G = -\frac{R'}{\tilde{\mathcal{D}}} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{R'} r dr = -\frac{2\pi R'}{\pi R^2 - \pi R'^2} \frac{R'^2}{2} = -\frac{R'^3}{R^2 - R'^2},$$

et on retrouve bien (9).

3. Pour calculer I_x , on passe en coordonnées polaires, pour lesquelles on a

$$dx dy = r dr d\theta,$$

$$y = r \sin \theta,$$

et donc

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_{\mathcal{D}} y^2 dx dy, \\ &= \iint_{\substack{0 \leq r \leq R \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi}} (r \sin \theta)^2 r dr d\theta, \end{aligned}$$

cette intégrale se découple selon

$$\begin{aligned} &= \int_{r=0}^R r^3 dr \int_{\theta=0}^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta, \\ &= \frac{1}{4} (R^4) \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta. \end{aligned}$$

Pour calculer cette dernière intégrale, on linéarise le carré du sinus :

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{2} (1 - \cos(2\theta)), \quad (12)$$

et donc

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\theta = \pi,$$

et

$$\boxed{I_x = \frac{\pi R^4}{4}.} \quad (13)$$

De même¹, on a

$$\boxed{I_y = \frac{\pi R^4}{4}.} \quad (14)$$

4. (a) D'après le théorème de Huygens, I_x , le moment quadratique de la surface \mathcal{D}' par rapport à l'axe x (voir figure 2), est égal à

$$I_x = I_{\Delta} + \mathcal{D}' \times R'^2,$$

où I_{Δ} est le moment quadratique de la surface \mathcal{D}' par rapport à l'axe Δ .

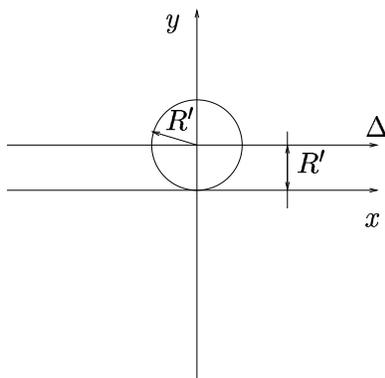


FIG. 2 – La surface \mathcal{D}' et les axes x et Δ .

D'après (13), ce moment est égal à

$$I_{\Delta} = \frac{\pi R'^4}{4}.$$

¹on peut aussi remarquer que x et y jouent le même rôle.

Ainsi,

$$I_x = \frac{\pi R'^4}{4} + \pi R'^2 \times R'^2,$$

et donc

$$\boxed{I_x = \frac{5\pi R'^4}{4}}. \quad (15)$$

(b) Puisque

$$I_x = \iint_{\mathcal{D}} y^2 dx dy - \iint_{\mathcal{D}'} y^2 dx dy,$$

on a, d'après (13) et (15),

$$\boxed{I_x = \frac{\pi R^4}{4} - \frac{5\pi R'^4}{4}}. \quad (16)$$

5. De même, on montre que

$$\boxed{I_y = \frac{\pi}{4} (R^4 - R'^4)}. \quad (17)$$

6. On peut retrouver (16) et (17), en procédant comme dans la remarque 1 : on écrit

$$I_x = \iint_{\mathcal{D}} y^2 dx dy = \iint_{\mathcal{D}} y^2 dx dy - \iint_{\mathcal{D}'} y^2 dx dy$$

D'après (13), la première intégrale est égale à :

$$I = \frac{\pi R^4}{4}.$$

On utilise de nouveau (10) ; comme dans (11), il vient pour la seconde intégrale

$$I' = \iint_{\mathcal{D}'} y^2 dx dy = \iint_{\substack{0 \leq r \leq R' \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi}} (r \sin \theta + R')^2 r dr d\theta.$$

On a donc

$$I' = \iint_{\substack{0 \leq r \leq R' \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi}} r^3 \sin^2(\theta) + 2r^2 R' \sin \theta + r R'^2 dr d\theta.$$

On linéarise le sinus (cf. (12)) et on a alors

$$I' = \frac{2\pi R'^4}{2 \times 4} + \frac{2\pi R'^2 \times R'^2}{2},$$

soit encore

$$I' = \frac{\pi R'^4}{4} + \pi R'^4 = \frac{5\pi R'^4}{4},$$

et donc

$$I_x = \frac{\pi R^4}{4} - \frac{5\pi R'^4}{4}.$$

On retrouve donc bien (16).

De même, on écrit

$$I_y = \iint_{\tilde{\mathcal{D}}} x^2 dx dy = \iint_{\mathcal{D}} x^2 dx dy - \iint_{\mathcal{D}'} x^2 dx dy = \frac{\pi R^4}{4} - \iint_{\mathcal{D}'} x^2 dx dy$$

On utilise de nouveau (10) ; comme dans (11), il vient pour la seconde intégrale

$$I' = \iint_{\mathcal{D}'} x^2 dx dy = \iint_{\substack{0 \leq r \leq R' \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi}} (r \cos \theta)^2 r dr d\theta.$$

On a donc

$$I' = \iint_{\substack{0 \leq r \leq R' \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi}} r^3 \cos^2(\theta) dr d\theta.$$

On linéarise le cosinus (de façon équivalente à (12)) et on a alors

$$I' = \frac{2\pi R'^4}{2 \times 4},$$

soit encore

$$I' = \frac{\pi R'^4}{4},$$

et donc

$$I_x = \frac{\pi}{4} (R^4 - R'^4).$$

On retrouve donc bien (17).

Correction de l'exercice 3.

On renvoie au chapitre 4 et à l'annexe F du polycopié de cours.