

Corrigé de l'examen médian du 12 novembre 2004

Correction de l'exercice 1.

En utilisant les formules classiques de la dérivée de u/v et de la dérivée de fonctions composées, nous obtenons :

$$g'(x) = -\frac{\sqrt{2}x(x^2 - 2)}{(x^4 - 2x^2 + 2)^{3/2}}.$$

Correction de l'exercice 2.

1. On obtient

$$\boxed{f'_n(x) = (n-1)x^{n-2} \ln x + x^{n-2}.} \quad (1)$$

2. Montrons, par récurrence pour $n \geq 1$, que

$$\boxed{f_n^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{x}.} \quad (2)$$

Pour $n = 1$, (1) fournit

$$f'_1(x) = 0 \times x^{-1} \ln x + x^{-1} = \frac{1}{x},$$

ce qui correspond à (2).

Supposons (2) vraie pour $n \geq 1$; démontrons la à l'ordre $n+1$. On écrit successivement

$$\begin{aligned} f_{n+1}^{(n+1)}(x) &= (x^n \ln x)^{(n+1)}, \\ &= \left((x^n \ln x)' \right)^{(n)}, \\ &= (nx^{n-1} \ln x + x^{n-1})^{(n)}, \end{aligned}$$

et puisque la dérivée n -ième de x^{n-1} , est nulle

$$\begin{aligned} &= (nx^{n-1} \ln x)^{(n)}, \\ &= n f_n^{(n)}(x), \end{aligned}$$

d'après la relation de récurrence (c'est-à-dire (2), vraie pour n)

$$\begin{aligned} &= n \frac{(n-1)!}{x}, \\ &= \frac{n!}{x}, \end{aligned}$$

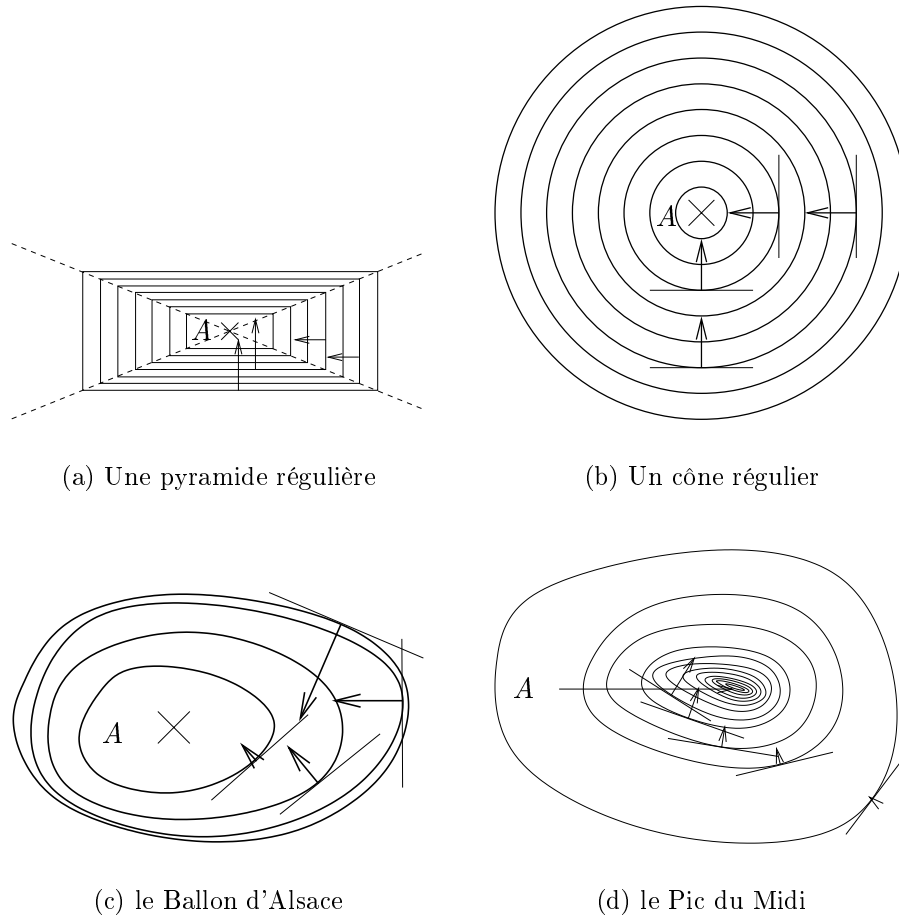


FIG. 1 – Quelques lignes de niveaux d'une carte de topographie.

ce qui est bien (2) à l'ordre $n + 1$.

Correction de l'exercice 3.

On renvoie à l'exercice 2.4 du TD 2.

1. Pour une pyramide régulière de base rectangulaire, les lignes de niveaux sont des rectangles (voir figure 1(a)). Pour le cône de base circulaire, ce sont des cercles (voir figure 1(b)).

Pour les deux autres figures, on se rappellera que plus la pente est importante, plus les lignes de niveaux sont rapprochées : pour le ballon d'Alsace, les lignes de niveaux sont rapprochées loin du sommet (voir figure 1(c)) et pour le Pic du Midi, elles sont rapprochées proche du sommet (voir figure 1(d)).

2. Sur chacune des figures, le sommet est noté A .
3. Pour tracer le gradient de g , on se rappellera qu'il est perpendiculaire aux isothermes tracées, dirigé selon les lignes de niveaux d'altitude croissantes et que sa norme est plus importante là où les lignes de niveau se rapprochent.

Pour la figures 1(a), le gradient est de norme constante sur chaque coté de la pyramide, puisque la pente est constante. Pour la figure 1(b), le gradient est de norme constante. Pour les figures 1(c), la norme du gradient diminue à l'approche du sommet ; pour la figure 1(d), c'est l'inverse.

Pour la figure 1(c), le gradient de g est défini *a priori* partout, si g est régulière. Au sommet, le gradient est nul, puisque les dérivées partielles de g y sont nulles. En revanche, le gradient approché n'est pas défini au sommet.

Pour les figures 1(b) et 1(d), le gradient de g est défini *a priori* partout sauf au sommet, si g est régulière. De même, le gradient approché n'y est pas défini.

Pour la figure 1(a), le gradient de g est défini *a priori* partout sauf au sommet et aux arrêtes de la pyramide (tracées en pointillé), si g est régulière. De même, le gradient approché n'y est pas défini.

Correction de l'exercice 4.

1. Voir polycopié de cours et TD. On a

$$\nabla f(r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \phi} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

et

$$\nabla \wedge V(r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} \frac{1}{r \cos \phi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta}(V_\phi) - \frac{\partial}{\partial \phi}(\cos \phi V_\theta) \right) \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial \phi}(V_r) - \frac{\partial}{\partial r}(r V_\phi) \right) \\ \frac{1}{r \cos \phi} \left(\frac{\partial}{\partial r}(r \cos \phi V_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta}(V_r) \right) \end{pmatrix}. \quad (4)$$

2. D'après (4), on a successivement

$$\begin{aligned} (\nabla \wedge V)_r &= \frac{1}{r \cos \phi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta}(V_\phi) - \frac{\partial}{\partial \phi}(\cos \phi V_\theta) \right) = 0, \\ (\nabla \wedge V)_\theta &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial \phi}(V_r) - \frac{\partial}{\partial r}(r V_\phi) \right) = \frac{1}{r} (-2r \times 2 \cos \phi \sin \phi + 4r \cos \phi \sin \phi) = 0, \\ (\nabla \wedge V)_\phi &= \frac{1}{r \cos \phi} \left(\frac{\partial}{\partial r}(r \cos \phi V_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta}(V_r) \right) = 0. \end{aligned}$$

On a donc

$$\boxed{\nabla \wedge V = 0.} \quad (5)$$

D'après le cours, cela implique qu'il existe un champ scalaire f tel que

$$\boxed{V = \nabla f.} \quad (6)$$

3. (a) Compte tenu de (3), (6) est équivalent à

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 (1 + \cos^2 \phi) r \\ 0 \\ -2r \cos \phi \sin \phi \end{pmatrix},$$

soit encore

$$\frac{\partial f}{\partial r} = 2 (1 + \cos^2 \phi) r, \quad (7a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = 0, \quad (7b)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \phi} = -2r \cos \phi \sin \phi. \quad (7c)$$

D'après (7b),

$$\boxed{f \text{ ne dépend que de } r \text{ et de } \phi.} \quad (8)$$

(b) Ainsi, en intégrant (7a) par rapport à r , on conclut qu'il existe $f_1(\phi)$ telle que

$$\boxed{f(r, \phi) = (1 + \cos^2 \phi) r^2 + f_1(\phi).} \quad (9)$$

(c) Ainsi, en réinjectant dans (7c), on obtient

$$\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \phi} = -2r \cos \phi \sin \phi = \frac{1}{r} (-2r^2 \cos \phi \sin \phi + f_1'),$$

soit

$$f_1' = 0.$$

Il existe donc une constante C telle que $f_1 = C$ et selon (9)

$$\boxed{f = f(r, \phi) = (1 + \cos^2 \phi) r^2 + C.} \quad (10)$$