

<b>Examen final du 23 janvier 2003</b>
--

Durée : deux heures

Tout document autorisé - Calculatrice autorisée.

**On rédigera les deux exercices sur deux copies différentes.**

NB : Tout résultat intermédiaire pourra être admis afin de permettre la résolution d'une question ultérieure.

**Exercice 1** (Une méthode du point fixe d'ordre trois).

Soit  $g$  la fonction définie par

$$g(x) = ax + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^3}, \quad (1)$$

où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont trois réels.

1. Montrer que si  $l$  est un réel strictement positif, alors les conditions

$$g(l) = l, \quad g'(l) = 0, \quad g''(l) = 0, \quad (2)$$

sont équivalentes au système linéaire suivant

$$M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l^4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ où } M = \begin{pmatrix} l^4 & l^2 & 1 \\ l^4 & -l^2 & -3 \\ 0 & l^2 & 6 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

2. Montrer que

$$\det M = -8l^6. \quad (4)$$

et que

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 \\ 6l^2 \\ -l^4 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

3. Pour toute la suite, on choisit  $A > 0$ ,  $l = \sqrt{A}$  et

$$g(x) = \frac{1}{8} \left( 3x + \frac{6A}{x} - \frac{A^2}{x^3} \right), \quad (6)$$

et on considère la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $x_{n+1} = g(x_n)$  et  $x_0 > 0$ .

(a) Montrer qu'il existe une constante  $K$  telle que, pour tout  $h$  assez petit,

$$g(l+h) = g(l) + Kh^3 + o(h^3). \quad (7)$$

(b) Dédurre de (7) que, si  $x_0$  est assez proche de  $l$ , alors la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\sqrt{A}$  avec un ordre de convergence égal à 3.

(c) L'ordre de convergence de la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vers  $\sqrt{A}$  peut-il être égal à 4?

#### 4. Simulations numériques

(a) Calculer les premiers itérés de la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  pour  $A = 2$  et  $x_0 = 1$ , puis  $x_0 = 1000$ . On pourra comparer les résultats avec les résultats fournis par la méthode de Newton pour la recherche de  $\sqrt{A}$ .

(b) Reprendre la question 4a en choisissant  $A = 997$  et  $x_0 \in \{1, 30\}$ . Conclure.

**Exercice 2** (Interpolation et intégration d'équations différentielles).

#### Notations

Soit  $h \in \mathbb{R}_+^*$  et  $n$  un entier naturel donné. On pose pour tout  $i \in \mathbb{N}$  :  $x_{n-i} = x_n - ih$ .

Soit  $m$  un entier naturel donné et  $F$  une fonction numérique, supposée définie et suffisamment régulière sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  contenant les réels  $x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-m}$ ; on notera pour simplifier les écritures :

$$\forall j \in \{n-m, \dots, n\} \quad F_j = F(x_j).$$

Soit  $p_m$  le polynôme d'interpolation de  $F$  sur  $\{x_{n-m}, x_{n-m+1}, \dots, x_n\}$ .

#### 1. Outils intermédiaires

(a) Pour tout  $i$  élément de  $\{0, \dots, m\}$  on considère l'opérateur  $\Delta^i$  défini par  $\Delta^0(F_j) = F_j$  pour tout  $j \in \{n-m, \dots, n\}$  et :

$$\forall i \in \{1, \dots, m\} \quad \forall j \in \{n-m, \dots, n-i\} \quad \Delta^i(F_j) = \Delta^{i-1}(F_{j+1}) - \Delta^{i-1}(F_j).$$

Déterminer en fonction de  $F_n, F_{n-1}, F_{n-2}$  et  $F_{n-3}$  les réels  $\Delta^1(F_{n-1}), \Delta^2(F_{n-2}), \Delta^3(F_{n-3})$ .

(b) On considère la propriété  $\mathcal{P}(i)$  définie pour tout  $i$  élément de  $\{0, \dots, m\}$  par :

$$\mathcal{P}(i) : \quad F[x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-i}] = \frac{1}{i!h^i} \Delta^i(F_{n-i}).$$

Démontrer  $\mathcal{P}(i)$  par récurrence.

#### 2. Détermination formelle de $p_m$

(a) Dresser la table des différences divisées de  $F$  relative au support des points  $\{x_{n-m}, x_{n-m+1}, \dots, x_n\}$  écrits dans cet ordre.

(b) Fournir alors l'expression formelle de  $p_m(x)$  en utilisant la diagonale montante de la table obtenue à la question précédente.

### 3. Utilisation pour la résolution d'un problème différentiel

On considère, pour  $f$  suffisamment régulière, le problème différentiel ( $E$ ) donné par :

$$\begin{aligned} \forall x \in [a, b], \quad y'(x) &= f(x, y(x)), \\ y(a) &= y_0 \end{aligned}$$

Les notations adoptées en début d'exercice restent valides ; on pose  $x_0 = a$  et  $x_N = b$ .

(a) Montrer que pour tout  $x_n$  convenable, on a :

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx.$$

(b) On considère alors la suite  $(y_n)_{m \leq n \leq N}$  des valeurs approchées des  $(y(x_n))_{m \leq n \leq N}$ , définie par :

$$y_0, y_1, \dots, y_m \quad \text{et} \quad \forall n \in \{m, \dots, N-1\} \quad y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} p_m(x) dx ;$$

$p_m$  désigne le polynôme d'interpolation de la fonction  $F$  qui, pour tout  $i \in \{n-m, \dots, n\}$ , vérifie

$$F(x_i) = f(x_i, y_i).$$

Expliquer brièvement le choix de la définition de la suite  $(y_n)$ .

Qu'a-t-elle d'original par rapport aux suites étudiées en cours ?

(c) Montrer que si  $m = 0$ , on retrouve la suite des itérés d'Euler.

(d) On pose  $s = (x - x_n)/h$ . Montrer qu'on peut écrire :

$$\forall n \in \{m, \dots, N-1\} \quad y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=0}^m \gamma_i \Delta^i(F_{n-i}),$$

où les  $\gamma_i$  sont des réels dont on prouvera l'existence et dont on fournira l'écriture sans toutefois les calculer.

(e) Pour  $m = 3$ , on admet qu'on trouve :

$$\gamma_0 = 1; \quad \gamma_1 = \frac{1}{2}; \quad \gamma_2 = \frac{5}{12}; \quad \gamma_3 = \frac{3}{8}.$$

En utilisant les résultats de 1a, montrer qu'on peut écrire :

$$\forall n \in \{3, \dots, N-1\} \quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} (55F_n - 59F_{n-1} + 37F_{n-2} - 9F_{n-3}).$$