MT40 Automne 2003

# Corrigé de l'examen final du 23 janvier 2004

## Correction de l'exercice 1.

1. Élémentaire.
2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x}} dx. \tag{1}$$

(a) En posant

$$u = \sqrt{1-x}, \tag{2}$$

on a $x = 1 - u^2$ et $dx = -2udu$, d'où, par parité pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{I_n = \int_{-1}^1 \left(1-u^2\right)^n du.} \tag{3}$$

(b) Cette intégrale est identique à celle de l'exercice 3.9 de [BM03]. En raisonnant comme dans la question 1d) de cet exercice, on montre que

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}.} \tag{4}$$

(c) On a immédiatement

$$\boxed{I_0 = 2.} \tag{5}$$

En utilisant successivement (4) pour $n$ allant de 1 à 4, on a

$$\boxed{I_1 = \frac{4}{3}, \quad I_2 = \frac{16}{15}, \quad I_3 = \frac{32}{35}, \quad I_4 = \frac{256}{315}.} \tag{6}$$

*Remarque* 1. On pourra voir la fonction matlab fournie `calculintegralexn_unsurqrt`. Cette fonction n'a pas beaucoup d'intérêt en soi mais sera utilisée par les autres fonctions matlab fournie.

(d) On note

$$\boxed{PQ = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k I_k.} \tag{7}$$

Par définition, on a

$$< P, Q >= \int_0^1 \frac{P(x)Q(x)}{\sqrt{1-x}} dx = \int_0^1 \frac{\sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k}{\sqrt{1-x}} dx,$$

ce qui donne immédiatement,

$$\boxed{< P, Q >= \sum_{k=0}^{n} \alpha_k I_k.} \tag{8}$$

3. On utilise la relation de récurrence à trois termes fournie dans le théorème 3.51 du chapitre 3 de [BM03]. Dans cette récurrence, on choisit tous les coefficients $\alpha_n$ égaux à 1. Dans ce corrigé, on utilise les notation du théorème cité. Ainsi, on a $P_0 = \alpha_0 = 1$. Puis, on écrit

$$P_1(x) = \alpha_1 \left( x - \frac{\langle Q_1, 1 \rangle}{\|1\|^2} \right) \text{ avec } Q_1(x) = x, \tag{9}$$

On remarque que

$$\langle Q_1, 1 \rangle = \langle X, 1 \rangle = I_1,$$

et d'après (6), on a donc

$$\langle Q_1, 1 \rangle = \frac{4}{3}.$$

On a aussi

$$\|1\|^2 =< 1, 1 >= I_0 = 2$$

Ainsi, selon (9), il vient, après calculs,

$$P_1(x) = x - \frac{2}{3}.$$

On normalise le polynôme obtenu de façon à avoir

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_n(0) = 1.} \tag{10}$$

On divise donc $P_1$ par $P_1(0) = -2/3$ et on obtient

$$P_1(x) = -\frac{3}{2}x + 1.$$

On recommence pour calculer $P_2$ :

$$P_2(x) = A_1 (x - B_1) P_1(x) - C_1 P_O(x).$$

On a

$$S_1 = \|P_1\|^2 = \langle P_1, P_1 \rangle$$

On écrit que

$$P_1 \times P_1 = \frac{9}{4}x^2 - 3x + 1,$$

et d'après (8) avec $P = P_1$ et $Q = P_1$, il vient

$$\langle P_1, P_1 \rangle = \frac{9}{4} I_2 - 3I_1 + I_0,$$

soit

$$\langle P_1, P_1 \rangle = \frac{2}{5}.$$

On a $A_1 = 1$, puis, en réutilisant de nouveau (8), on calcule

$$B_1 = \frac{\langle xP_1, P_1 \rangle}{S_1}.$$

Bref, après calculs et normalisation, on a

$$P_2(x) = \frac{35}{8}x^2 - 5x + 1.$$

On obtient finalement

$$P_0 = 1, \tag{11a}$$

$$P_1 = -\frac{3}{2}x + 1, \tag{11b}$$

$$P_2 = \frac{35}{8}x^2 - 5x + 1. \tag{11c}$$

*Remarque* 2. L'utilisation du résultat (8) n'était pas indispensable, mais il permet une certaine automatisation du calcul. Grâce à cela, on a pu écrire la fonction fournie `calcul_poly_symb_unsurqrt`, qui calcule les $n$ premiers polynômes orthogonaux pour le poids $w$. Voir aussi la fonction `test_ortho_unsurqrt`, qui vérifie que ces polynômes sont bien orthogonaux.

4. (a) On procède comme dans l'exercice 3.9 de [BM03] : on définit les polynômes $Q_n$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad Q_n(x) = L_{2n}\left(\sqrt{1-x}\right), \tag{12}$$

on vérifie que les $Q_n$ sont des polynômes (ce qui n'est pas le cas *a priori*), qu'ils sont de degré $n$ et qu'ils sont sont orthogonaux deux à deux.

Puisque $L_n$ est de la parité[1] de $n$, $L_{2n}$ est pair et ne comporte donc que des puissances paires de $x$. Ainsi $L_{2n}\left(\sqrt{1-x}\right)$ ne comportera que des puissances entières de $\sqrt{1-x}^2 = 1 - x$ et $Q_n$ est bien un polynôme en $x$.

On vérifie aisément que, pour tout $n$, $Q_n$ est de degré $n$.

Vérifions que les $Q_n$ sont orthogonaux deux à deux. La démarche est identique à celle de l'exercice 3.9 de [BM03] : on calcule, pour $m \neq n$

$$\langle Q_n, Q_m \rangle = \int_0^1 \frac{Q_n(x)Q_m(x)}{\sqrt{1-x}}dx = \int_0^1 \frac{L_{2n}\left(\sqrt{1-x}\right)L_{2m}\left(\sqrt{1-x}\right)}{\sqrt{1-x}}dx.$$

On fait le changement de variable (2) et donc

$$\langle Q_n, Q_m =\rangle \int_1^0 \frac{L_{2n}(u)\,L_{2m}(u)}{u}(-2udu) = 2\int_0^1 L_{2n}(u)\,L_{2m}(u)\,du,$$

et par parité (les fonctions $L_{2n}$ et $L_{2m}$ sont paires)

$$\langle Q_n, Q_m \rangle = \int_{-1}^1 L_{2n}(u)\,L_{2m}(u)\,du.$$

[1] Voir section C.5, annexe C de [BM03].

Dans cette dernière équation, on voit apparaître le produit scalaire de $L_{2n}$ et de $L_{2m}$ pour le poids $w = 1$. Or $2n \neq 2m$ et les fonctions $L_p$ sont orthogonales pour ce poids, donc $\langle Q_n, Q_m \rangle$ est nul.

Par unicité des polynômes orhogonaux (voir théorème 3.42 et correction de l'exercice 3.9 de [BM03]), on en déduit que le polynôme $Q_n$ est proportionnel à $P_n$ :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists \beta_n \in \mathbb{R}^*, \quad P_n(x) = \beta_n L_{2n}\left(\sqrt{1-x}\right).} \tag{13}$$

(b) On utilise alors la normalisation (10) et la normalisation de $L_n$ ($L_p(1) = 1$) : on a $1 = L_{2n}(1) = P_n(0) = 1$. D'où $\beta_n = 1$ et

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_n(x) = L_{2n}\left(\sqrt{1-x}\right).} \tag{14}$$

5. (a) D'après le cours (théorème (3.47) de [BM03]), les points $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ de la formule

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 r(x)w(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} W_i r(x_i), \tag{15}$$

sont les $n+1$ racines du polynôme $P_{n+1}$. Notons $(y_j)_{0 \leq j \leq 2n+1}$ les $2n+2$ racines du polynôme de Legendre $L_{2n+2}$ (qui est de degré $2n+2$). Soit $x_i$, l'une des $n+1$ racines[2] de $P_{n+1}$. Dire que $x_i$ est racine de $P_{n+1}$ équivaut à

$$P_{n+1}(x_i) = 0,$$

soit, d'après (14),

$$0 = P_{n+1}(x_i) = L_{2n+2}\left(\sqrt{1-x_i}\right).$$

Ainsi $\sqrt{1-x_i}$ est l'une des racine $y_j$ de $L_{2n+2}$. Puisque $\sqrt{1-x_i}$ est positif, c'est donc l'une des $n+1$ racines positives de $L_{2n+2}$ ; par symétrie, puisque $L_{2n+2}$ est pair, il admet $n+1$ racines strictement positives et $n+1$ racines strictement négatives.

$$\boxed{\text{Notons donc } (y_k)_{0 \leq k \leq n} \text{ les } n+1 \text{ racines strictement positives du polynôme de Legendre } L_{2n+2}.} \tag{16}$$

Ainsi, d'après ce qui précède, il existe $k \in \{0, ..., n\}$ tel que

$$\sqrt{1-x_i} = y_k,$$

ce qui équivaut à

$$x_i = 1 - y_k^2.$$

Ainsi, on a après un réarrangement éventuel des $y_k$ dans l'ordre croissant[3]

$$\boxed{\forall k \in \{0, ..., n\}, \quad x_k = 1 - y_k^2,} \tag{17}$$

où les $(y_k)_{0 \leq k \leq n}$ sont définis par (16).

[2] Le théorème 3.45 de [BM03] assure que ces racines sont réelles, distinctes et dans $]0,1[$.

[3] Ce n'est pas l'ordre des racines qui compte, mais leur valeur.

Avec les notations précédentes, notons $(Y_j)_{0\leq j\leq 2n+1}$ les $2n+2$ poids associés à la formule de quadrature de Gauss-Legendre

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{j=0}^{2n+1} Y_j f(y_j). \tag{18}$$

On a vu dans le cours que, pour raison de symétrie, les $Y_j$ étaient aussi symétriques.

Notons donc $(Y_k)_{0\leq k\leq n}$ les $n+1$ poids de la formule de Gauss-Legendre (18),

associés aux $(y_k)_{0\leq k\leq n}$ définis par (16). (19)

On peut montrer que par symétrie, on a

$$\boxed{\forall k \in \{0,...,n\}, \quad W_k = 2Y_k.} \tag{20}$$

Bref, grâce aux définitions (16) et (19), les points $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ et les poids $(W_i)_{0\leq i\leq n}$ de la formule (15) sont complètement définis par (17) et (20).

(b) C'est grâce à (17) et (20) qu'on a pu calculer les poids et les points donnés dans l'énoncés.

On pourra consulter la fonction matlab fournie `points_poids_unsurqrt` qui utilise les formules (17) et (20). Dans cette fonction, sera utilisée la fonction `points_poids_gauss_diago`, qui détermine les points et les poids de Gauss-Legendre par diagonalisation (voir TP 3.H de [BM03]).

On calcule les approximations des intégrales

$$I = \int_0^1 x^2 w(x)dx,$$
$$J = \int_0^1 x^7 w(x)dx,$$
$$K = \int_0^1 \sqrt{x+1}w(x)dx,$$

pour $n \in \{0,...,3\}$. On connaît d'après (6), les valeurs exactes de $I = I_2 = 16/15$. On peut montrer que $J = I_7 = 4096/6435$. D'après les valeurs numériques de l'énoncé, ou en utilisant la fonction fournie `points_poids_unsurqrt`, puis la fonction `int_gauss`, on peut donc calculer l'erreur commise pour $I$ et $J$.

Conformément au cours (corollaire 3.49 de [BM03]), on trouve une erreur nulle (aux arrondis de calculs près) pour $I$ dès que $n \geq 1$ et pour $J$ dès que $n \geq 3$.

Pour $K$, on trouve les erreurs suivantes : $\varepsilon \approx 1,1 10^{-2}$ pour $n=0$, $\varepsilon \approx 10^{-4}$ pour $n=1$, $\varepsilon \approx 1,6 10^{-4}$ pour $n=2$, $\varepsilon \approx 3 10^{-8}$ pour $n=3$. La convergence est donc très rapide.

*Remarque* 3. Pour ceux que cela intéresse, on trouvera le fichier matlab joint `points_poids_gauss_wpoids` qui calcule les polynômes orthogonaux, pour un poids quelconque $w$ sur un intervalle quelconque, puis en déduit les poids et les points de la formule de quadrature associés. Toute la théorie qui permet de réaliser ce programme peut être trouvée dans cet énoncé (avec un peu de recul!!). On consultera aussi le TP 3.H de [BM03], dont on utilise la méthode.

La calcul est fait en symbolique et cette fonction est plus à but pédagogique qu'autre chose, puisque des valeurs de $n$ supérieures à 50 peuvent vite provoquer la saturation de la machine! Néanmoins, ce programme est valable pour un poids et un intervalle quelconques.

**Correction de l'exercice 2.**

1. *Etude de la fonction $f$*

   (a) On mène une étude complète et rigoureuse d'une fonction donnée.
   - $f$ est définie, continue, dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme.
   - On calcule $f'(x)$ ; on trouve $f'(x) = 3\left(x^2 - 1\right)$. L'étude de signe est élémentaire ; on en déduit le tableau de variation suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $5/2$ | $\searrow$ | $-3/2$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

   (b) La fonction $f$ est continue sur chacun des intervalles mis en oeuvre dans le tableau de variation, d'où l'existence des trois solutions de l'équation $(E) : f(x) = 0$ par application du théorème des valeurs intermédiaires ; on les note $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ dans l'ordre croissant. La stricte monotonie de $f$ sur chacun des intervalles précités assure que ce sont les seules solutions.

   (c) Le tracé peut être fourni via matlab ; sa mise en oeuvre est laissée au lecteur.

   (d) L'étude de signe permet de faire le bilan des résultats obtenus lors de l'étude des variations de $f$. On trouve :

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha_1$ | | $\alpha_2$ | | $\alpha_3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

2. *Etude de la convergence de la suite des itérés de Newton*

   (a) La suite des itérés de Newton associée à l'équation proposée est définie par :

$$x_0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - 3x_n + 1/2}{3\left(x_n^2 - 1\right)},$$

   pourvu que le dénominateur ne soit pas nul.

   (b) *Etude de* $(x_n)$ pour $x_0$ élément de $]-\infty, -1[ \cup ]+1, +\infty[$

   (i) Considérons un $x_0$ élément de $]-\infty, \alpha_1]$
   - La suite $(x_n)$ est majorée par $\alpha_1$. En effet par argument géométrique, vu le signe de $f'(x_n)$ et le choix de $x_0$, pour tout $x_n$ de $]-\infty, \alpha_1]$, le réel $x_{n+1}$ (abscisse du point d'intersection de l'axe des abscisses avec la tangente à la courbe représentative de $f$ au point d'abscisse $x_n$ ) est majoré par $\alpha_1$.
   - Pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, on a :

$$x_{n+1} - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

     Vu le signe de $f'(x_n)$ et de $f(x_n)$ sur $]-\infty, \alpha_1]$ , l'écart $x_{n+1} - x_n$ est positif. Par conséquent, la suite $(x_n)$ est croissante.
   - Ainsi, $(x_n)$ est convergente vers $l$ solution de l'équation aux limites ; par définition même de l'itération de Newton, la limite $l$ est solution de $(E)$ donc ne peut être que $\alpha_1$.
   - Considérons un $x_0$ élément de $[\alpha_1, -1[$

Il est clair, au vu du signe de $f'(x_0)$, que le terme $x_1$ appartient à l'intervalle $]-\infty, \alpha_1]$. L'élément $x_1$ joue alors le rôle du $x_0$ étudié plus haut. On déduit la convergence de la suite $(x_n)$ vers $\alpha_1$ dans ce cas encore.

– *Bilan*

Pour tout $x_0$ élément de $]-\infty, -1[$, la suite $(x_n)$ des itérés de Newton de $x_0$ converge vers $\alpha_1$.

(ii) On montre de la même façon que, pour tout $x_0$ élément de $]+1, +\infty[$, la suite $(x_n)$ des itérés de Newton de $x_0$ converge vers $\alpha_3$, via le fait qu'une suite décroissante et minorée converge.

(c) **Question facultative**

Il reste à étudier la convergence de la suite $(x_n)$ pour tout $x_0$ élément de $]-1, +1[$.

(i) On considère donc un réel $b$ et l'intervalle $[0, b]$ pour un $b$ élément de l'ouvert $]\alpha_2, 1[$. On utilise alors le théorème de condition suffisante de convergence d'une suite de Newton, étudié en cours. Les quatre première hypothèses sont certainement vérifiées, pourvu que $b$ soit supérieur à $\alpha_2$. La dernière hypothèse, la plus délicate en général à établir se traduit par les deux contraintes fournies par l'énoncé, c'est-à-dire :

$$b > \frac{1}{6} \quad \text{et} \quad |F(b)| < b$$

où $F$ est définie par : $F(x) = f(x)/f'(x)$.

(ii) On étudie alors les variations de $F$ sur $[0, 1]$.

– $F$ est continue, dérivable en tout point où elle est définie, puisque fonction rationnelle, donc sur $[0, 1[$.

– On calcule alors $F'(x)$. On trouve :

$$F'(x) = \frac{N(x)}{3\left(x^2 - 1\right)^2},$$

sachant que $N(x) = x^4 - x + 3$.

– *Lemme*

Grâce à l'étude des variations de $N$ sur l'intervalle $[0, 1]$, on montre que $N$ est positif strictement sur cet intervalle donc que $F'(x)$ est positive donc $F$ croissante sur $[0, 1]$.

– D'où le tableau de variation de $F$

| $x$ | $0$ | | $\alpha_2$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $F'(x)$ | | $+$ | | | $\|$ |
| $F(x)$ | $-1/6$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ $+\infty$ | $\|$ |

(iii) Une méthode de détermination d'un $b_0$ maximal dans $]\alpha_2, 1[$ serait de travailler graphiquement. Sous matlab, on demande la représentation sur $[0, 1]$ dans la même fenêtre, de la courbe $(\mathcal{F})$ représentative de $F$ et de celle de $(\mathcal{D})$ représentative de $d$ donnée par $d(x) = x$. On lit alors graphiquement le $b_0$ cherché, qui est optimal "au sens du critère proposé".

*Remarque :* En effet, on peut facilement montrer que $b_0$ est voisin de $0,63$. Pourtant, on voit que pour $x_0 = 0,7$, pourtant strictement supérieur à $b_0$, la suite des itérés de

Newton est encore convergente vers $\alpha_2$. Ceci met en évidence que le critère exige trop, qu'il est une condition suffisante mais non nécessaire de convergence.

(iv) Pour terminer l'étude, il convient de décider comment on doit découper l'intervalle $]-1,1[$ pour permettre de conclure que la suite des itérés de Newton est ou non convergente et vers quelle racine de l'équation $(E)$.

- Le point précédent a permis d'identifier un intervalle $[0, b_0]$ dans lequel on peut choisir $x_0$ garant de convergence de la suite $(x_n)$ vers $\alpha_2$.
- Par traitement géométrique, on détermine alors des positions seuils pour $x_0$ qui entraînent toujours une convergence vers l'une des racines $\alpha_i$ , pour $i$ élément de $\{1, 2, 3\}$. Ces positions seuils peuvent présenter une grande instabilité.

*Remarque* 4. On pourra faire tourner les trois sources matlab fournies : `b_otpim.m`, `iteres_newton.m` et `trace.m`

## Références

[BM03] Jérôme Bastien et Jean-Noël Martin. *Introduction à l'analyse numérique ; applications sous matlab.* Dunod, Paris, 2003.