

**Corrigé de l'examen final du 19 janvier 2005**

**Correction de l'exercice 1.**

- (1)  $I_a$  est une intégrale généralisée, en raison des irrégularités en bords d'intervalle ; elle existe car  $X \mapsto e^X$  est  $C^\infty$  sur  $[-a, a]$  et que

$$\sqrt{a^2 - X^2} = (a^2 - X^2)^p \quad \text{avec } p = \frac{1}{2} < 1.$$

- (2) (a) La méthode de Simpson, telle qu'étudiée en cours de mt40, requiert que la fonction à intégrer définie par

$$X \mapsto \frac{e^X}{\sqrt{a^2 - X^2}}$$

soit  $C^4$  sur le fermé  $[-a, a]$ . Or elle n'est pas définie ici en bords d'intervalle. Par suite la méthode de Simpson n'est pas applicable.

- (b) On effectue le changement de variable proposé : on vérifie qu'il est licite, on modifie les bornes d'intégration devenues respectivement  $-a/a$  et  $a/a$ . On a  $dX = adx$  ; on remplace  $X$  par  $ax$ , un  $a$  sort de la racine en bas et se simplifie avec celui issu de  $dX$ .
- (c) On peut utiliser une intégration de Tchebyshev : en effet l'intervalle proposé ainsi que la fonction poids sont conformes ; de plus la fonction "restante" après "extraction de la fonction poids"

$$r : x \mapsto e^{ax}$$

est  $C^\infty$  sur  $[-1; 1]$ . Les hypothèses indispensables sont donc vérifiées.

- (3) Les points du support en intégration de Tchebyshev apparaissent clairement dans une interprétation géométrique. Ils sont les cosinus d'angles régulièrement répartis sur un cercle trigonométrique. Plus précisément :

$$\forall i \in \{0, \dots, 3\} \quad x_i = \cos \left( \frac{2i+1}{4} \frac{\pi}{2} \right).$$

- (a) Par suite une valeur approchée de  $I_a$  est donc donnée par

$$I_a \simeq \frac{\pi}{4} \left( e^{a \cos(\frac{\pi}{8})} + e^{a \cos(\frac{3\pi}{8})} + e^{a \cos(\frac{5\pi}{8})} + e^{a \cos(\frac{7\pi}{8})} \right).$$

- (b) L'erreur de méthode est fournie dans les documents remis en cours. Elle s'écrit :

$$E_4 = r^{(8)}(\xi) \frac{2\pi}{2^8 (8!)} \quad \text{avec } \xi \in [-1; 1].$$

Par suite, comme  $r$  est positive et croissante sur  $[-1; 1]$ , son maximum est atteint en 1. Vu que

$$r^{(8)}(x) = a^8 e^{ax}.$$

Il vient

$$|E_4| = E_4 \leq a^8 e^a \frac{2\pi}{2^8 (8!)}.$$

(c) Pour  $a = 1/10$ , on trouve

$$I_{\frac{1}{10}} \simeq 3,149451545 \quad \text{et} \quad |E_4| \leq 6,73 \cdot 10^{-15}.$$

(4) (a) Les valeurs  $x_0, \dots, x_n$  sont encore des cosinus d'angles régulièrement répartis sur le cercle trigonométrique. Ici on a :

$$\forall i \in \{0, \dots, n\} \quad x_i = \cos \left( (2i+1) \frac{\pi}{2n+2} \right),$$

d'où

$$I_a \simeq \frac{\pi}{n+1} \left( e^{a \cos(1 \frac{\pi}{2n+2})} + e^{a \cos(3 \frac{\pi}{2n+2})} + \dots + e^{a \cos((2n+1) \frac{\pi}{2n+2})} \right).$$

(b) L'algorithme *calcul1*( $a, n \rightarrow I_a$ ), dont l'interface n'est pas précisée ici en raison de sa simplicité, est réduit à l'évaluation de la somme obtenue ci-dessus. On pourra écrire une boucle qui suraffecte la somme  $S$  initialisée à 0, pour une variable de contrôle  $i$  parcourant  $\{0, \dots, n\}$ .

(c) Pour améliorer l'algorithme précédent,

– on commence par écrire en fonction de  $a$  et  $n$  une majoration de l'erreur  $E_{n+1}$  :

$$|E_{n+1}| = E_{n+1} \leq a^{2n+2} e^a \frac{2\pi}{2^{2n+2} ((2n+2)!)}.$$

– On donne un nom au majorant ; on pose alors

$$u_{n+1} = a^{2n+2} e^a \frac{2\pi}{2^{2n+2} ((2n+2)!)}.$$

– On montre que la suite  $(u_n)$  est décroissante et convergente vers 0. Ceci assure la convergence d'un algorithme de recherche du plus petit entier  $n$ , noté  $n_0$ , vérifiant :

$$u_{n+1} < \varepsilon.$$

– Par suite l'erreur de méthode est certainement majorée par  $\varepsilon$ . Il suffit alors d'appeler *calcul1*( $a, n_0 \rightarrow I_a$ ) pour obtenir une valeur approchée cohérente avec le cahier des charges.

### Correction de l'exercice 2.

Cet exercice est inspiré en partie de l'exercice 4.6 p.174 de l'ouvrage de cours auquel on renvoie.

(1) Il suffit de calculer les dérivées successives de  $g$ , de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^*$  : on a, après calculs,

$$g(\sqrt{A}) = \sqrt{A}, \tag{1a}$$

$$g'(\sqrt{A}) = 0, \tag{1b}$$

$$g''(\sqrt{A}) = 0. \tag{1c}$$

D'après le théorème D.5 page 368 de l'ouvrage de cours, cela implique que

$$\boxed{\text{l'ordre de convergence de la suite } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est (au moins) } 3.} \quad (2)$$

La preuve est identique à celles de la proposition 4.14 et du corollaire 4.16 de l'ouvrage ; on note  $l = \sqrt{A}$  et  $e_n = l - x_n$  et on écrit la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 3 pour  $g$  sur l'intervalle  $(l, x_n)$  en utilisant (1) :

$$e_{n+1} = l - x_{n+1} = g(l) - g(x_n) = -g'(l)e_n - \frac{1}{2}g''(l)e_n^2 - \frac{1}{6}g'''(\xi_n)e_n^3 = -\frac{1}{6}g'''(\xi_n)e_n^3,$$

où  $\xi_n$  est compris entre  $l$  et  $x_n$ . On a donc, si  $e_n$  tend vers 0,

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^3} = \frac{1}{6} |g'''(l)|.$$

(2) Après calculs (que l'on peut faire en symbolique), on a

$$g^{(4)}(\sqrt{A}) = \frac{3}{A} \neq 0, \quad (3)$$

et, d'après le théorème le théorème D.5,

$$\boxed{\text{l'ordre de convergence de la suite } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est exactement } 3.}$$

(3) (a) La fonction  $g$  est dérivable sur l'intervalle  $\mathbb{R}_+^*$ . La dérivée de  $g$  est du même signe que la fonction  $h$  définie par

$$h_1(x) = 3x^2(x^4 - 2Ax^2 + A^2),$$

qui se factorise sous la forme

$$h_1(x) = 3x^2(x^2 - A)^2.$$

On en déduit donc que

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^* \text{ et } g' \text{ est nulle en } \sqrt{A}.} \quad (4)$$

(b) On vérifie que, pour tout  $x$  appartenant à  $\mathbb{R}_+^*$ , on a

$$g(x) - x = -\frac{1}{8x^3} (5x^4 - 6Ax^2 + A^2),$$

expression bicarré qui se factorise en étudiant  $5x^2 - 6Ax + A^2$ . On obtient que  $x \mapsto g(x) - x$  est du signe de

$$h_2(x) = -(x^2 - A)(5x^2 - A).$$

On en déduit donc que, en posant

$$\boxed{\alpha = \frac{\sqrt{5A}}{5} < \sqrt{A},} \quad (5)$$

on a

$$\boxed{\forall x \in ]0, \alpha[, \quad g(x) < x ;} \quad (6a)$$

$$\boxed{\forall x \in ]\alpha, \sqrt{A}[, \quad g(x) > x ;} \quad (6b)$$

$$\boxed{\forall x \in ]\sqrt{A}, +\infty[, \quad g(x) < x ;} \quad (6c)$$

$$\boxed{g(\alpha) = \alpha ;} \quad (6d)$$

$$\boxed{g(\sqrt{A}) = \sqrt{A}.} \quad (6e)$$

- (c) On vérifie que  $g(x) = 0$  est équivalent à  $3x^4 + 6Ax^2 - A^2 = 0$ , expression bicarrée. Les racines de  $3x^2 + 6Ax - A^2 = 0$  étant égales à  $(-3 \pm 2\sqrt{3})A/3$ , on en déduit que

$$\boxed{\text{l'unique zéro de } g \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ est égal à } \beta = \sqrt{\frac{2\sqrt{3}-3}{3}}A.} \quad (7)$$

- (d) On remarque que la droite  $y = 3x/8$  est une asymptote de la courbe représentative de la fonction  $g$  en  $+\infty$ . Des questions 3a, 3b et 3c, on déduit le graphe de la fonction  $g$ , représenté sur la figure 1.

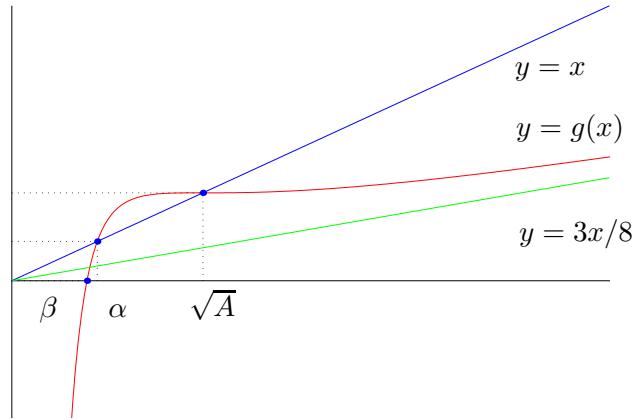


FIG. 1. La fonction  $g$ .

- (4) Nous cherchons maintenant à étudier la convergence de la suite des itérés  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $x_0$  élément de  $\mathbb{R}_+^*$ , définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = g(x_n).$$

- (a) Supposons que  $x_0$  appartient à  $I_1 = ]\alpha, \sqrt{A}[$ . On peut remarquer que l'intervalle  $I_1$  est stable par  $g$ , c'est-à-dire  $g(I_1) \subset I_1$ ; en effet,  $g$  étant croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ ; on a

$$\alpha < x < \sqrt{A} \implies g(\alpha) = \alpha < g(x) < g(\sqrt{A}) = \sqrt{A}.$$

La fonction  $g$  est définie sur  $I_1$  tout entier; si  $x_0$  appartient à  $I_1$ , on en déduit par récurrence que, pour tout  $n$ ,  $x_n$  est défini et qu'il appartient à  $I_1$ . D'autre part, dans ce cas, la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement croissante. En effet, on a  $x_n \in ]\alpha, \sqrt{A}[$ ; donc, d'après (6b),  $x_{n+1} = g(x_n) > x_n$ . Ainsi, la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante et majorée (par  $\sqrt{A}$ ); elle est donc convergente vers un réel  $l$  qui vérifie  $g(l) = l$ , puisque  $g$  est continue sur  $I_1$ . D'après (6), cette limite ne peut être que  $\sqrt{A}$  ou  $\alpha$ . Puisque, pour tout  $n$ , on a  $\alpha < x_0 < x_n$ , la convergence ne peut avoir lieu vers  $\alpha$ . Dans ce cas, la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge donc vers  $\sqrt{A}$ .

*Remarque 1.* Cette méthode de preuve de convergence est très souvent utilisé pour des suites du point fixe.

Supposons que  $x_0$  appartient à  $I_2 = ]\sqrt{A}, \infty[$ . La preuve est identique au cas suivant, puisque  $I_2$  est aussi stable par  $g$ . Sur  $I_2$ ,  $g$  est définie. Comme précédemment, en utilisant cette fois-ci (6c), on montre que la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante et minorée (par  $\sqrt{A}$ ); elle converge donc vers  $\sqrt{A}$ .

Bref, on en déduit que

si $x_0$ appartient à l'intervalle $] \alpha, \sqrt{A}[$ ou $] \sqrt{A}, +\infty[$ , alors la suite des itérés converge vers $\sqrt{A}$ .
---

(8)

*Remarque 2.* On pourrait être tenté d'utiliser le théorème 4.8 p. 148 de l'ouvrage de cours pour montrer la convergence de la suite des itérés sur  $] \alpha, \sqrt{A}[$  ou  $] \sqrt{A}, +\infty[$ . Sur l'intervalle  $] \sqrt{A}, +\infty[$ , on peut montrer que la fonction  $g$  est convexe<sup>1</sup>. Ainsi,  $g'$  est croissante sur  $] \sqrt{A}, +\infty[$ ; on peut montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g'(x) = 3/8$ . Ainsi, pour tout  $x$  appartenant à  $] \sqrt{A}, +\infty[$ ,  $g'$  est comprise entre 0 et 3/8. Pour tout  $x_0$  appartenant à  $] \sqrt{A}, +\infty[$ , les itérés  $x_n$  appartiennent donc à  $[\sqrt{A}, x_0]$ , intervalle sur lequel on peut appliquer le théorème 4.8. En revanche, sur l'intervalle  $[\alpha, \sqrt{A}]$ , on peut montrer que la dérivée peut dépasser 1 et on ne peut donc appliquer le théorème 4.8.

- (b) Puisque  $\alpha$  ou  $\sqrt{A}$  sont des points fixes de  $g$ ,

si $x_0$ est égal à $\alpha$ ou $\sqrt{A}$ , la suite des itérés est constante.
---

(9)

- (c) Étudions sommairement le cas où  $x_0$  appartient à  $I_3 = ]0, \alpha[$ .

Rappelons que  $g$  n'est pas définie en 0. Si  $x = \beta \in I_3$ , alors  $g(x) = 0$ ; cela implique que, si  $x_n = \beta$ , alors  $g(x_n) = x_{n+1} = 0$  et donc  $x_{n+2} = g(0)$  n'est pas défini. En fait, il existe une infinité de valeurs de  $x_0$ , pour lesquelles la suite des itérés n'est défini que pour un nombre fini de termes.

En effet, la fonction  $g$  définit une bijection strictement croissante de  $\mathbb{R}_+^*$  sur  $\mathbb{R}$  et donc  $g^{-1}$  est une bijection strictement croissante de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Ainsi, si  $x$  appartient à  $[\beta, \alpha[$ , alors  $g^{-1}(x)$  appartient à  $[g^{-1}(\beta), g^{-1}(\alpha)[ = [\beta_1, \alpha[$ . Puisque  $\beta > 0$ , alors  $\beta > g(\beta)$  et donc  $\beta_1 = g^{-1}(\beta) > \beta$ ; on a donc  $g^{-1}(x) \in ]\beta, \alpha[$ . On en déduit par récurrence sur  $n$  que, si  $x$

---

<sup>1</sup>On montre pour cela que  $g''$  est positive ou nulle.

appartient à  $[\beta, \alpha[$ , alors  $g^{-n}(x) \in ]\beta, \alpha[$ . Puisque  $g^{-n}(0) = g^{-n}(g^{-1}(\beta)) = g^{-n-1}(\beta)$ , on en déduit que  $g^{-n}(0) \in ]\beta, \alpha[$ , pour  $n \geq 1$ . On pose alors

$$J = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} g^{-n}(0) \subset [\beta, \alpha[. \quad (10)$$

On peut en déduire la propriété suivante :

Pour tout  $x_0$  appartenant à  $J$ , la suite des itérés n'est définie que pour un nombre fini de termes. (11)

En effet, si  $x_0 \in J$  alors, il existe  $n \geq 1$ , tel que  $x_0 = g^{-n}(0)$  et donc  $x_n = g^n(x_0) = 0$  et  $x_{n+1}$  n'est pas défini.

Si  $x_0$  appartient à  $]0, \alpha[ \setminus J$ , le comportement de la suite des itérés est plus difficile à étudier, puisque  $]0, \alpha[$  n'est pas stable par  $g$  ; en effet  $g(I_3) = ]-\infty, \alpha[$ . Dans ce cas, tout type de comportement est à envisager : la suite peut n'être pas définie ou peut converger vers  $-\sqrt{A}$ .

On consultera le corrigé de la question 5.

- (5) Donnons les différentes valeurs des itérés obtenues, calculées avec matlab, pour  $A = 5$ , c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g(x) = \frac{1}{8} \left( 3x + \frac{30}{x} - \frac{25}{x^3} \right),$$

et pour

$$x_0 \in \left\{ 1; 4; 0, 1; 10^{10}; \sqrt{\frac{2\sqrt{3}-3}{3}} \times 5 \right\},$$

Voir les tableaux 1, 2, 3, 4 et 5, à partir de la page 8, qui fournissent les valeurs de  $x_n$  et de l'erreur  $e_n = |x_n \pm \sqrt{A}|$ .

- Si  $x_0 = 1 = \alpha$ , la suite est stationnaire, ce qui est annoncé par (9), converge vers  $\alpha$  et ne converge donc pas vers  $\sqrt{A}$ . (voir tableau 1 page 8).
- Si  $x_0 = 4 \in ]\sqrt{A}, +\infty[$ , la suite converge bien vers  $\sqrt{A}$ , ce qui est annoncé par (8) (voir tableau 2 page 8). De plus, on observe, que le nombre de chiffres exacts (donnés par l'opposé de l'exposant de l'erreur) est égal à 1 (pour  $n = 1$ ), puis à 4 (pour  $n = 2$ ), puis à 12 (pour  $n = 3$ ), ce qui corrobore l'ordre de convergence égal à 3 (voir le corollaire D.4 page 367 de l'ouvrage de cours). À partir de  $n = 4$ ,  $x_n$  n'évolue plus : la précision machine (de l'ordre de  $10^{-16}$ ) est atteinte. Enfin, en utilisant les programmes de TP 4.A et 4.B de l'ouvrage de cours, on peut retrouver cet ordre par une mesure de pente de droite, égal à 2,8764571 sur la figure 2.
- Si  $x_0 = 0, 1 \in ]0, \alpha[$ , la suite converge cette fois-ci vers  $-\sqrt{A}$  (voir tableau 3 page 9) :  $x_1$  devient négatif, comme tous les  $x_n$ , ce qui est annoncé par la question 4c.
- Si  $x_0 = 10^{10} \in ]\sqrt{A}, +\infty[$ , la suite converge bien vers  $\sqrt{A}$ , ce qui est annoncé par (8) (voir tableau 4 page 10). L'ordre 3 de convergence ne se manifeste qu'à partir de  $n \geq 23$ . Pour les valeurs de  $n$  plus petites, les valeurs de  $x_n$  sont «très grandes» et la vitesse de convergence semble être «très petite». Ce phénomène peut s'expliquer de la façon

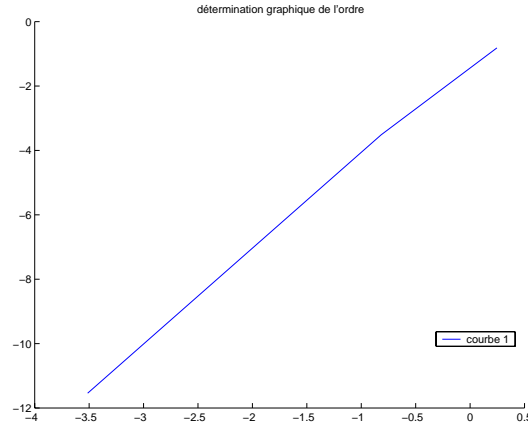


FIG. 2. Mesure empirique de l'ordre de convergence.

qualitative<sup>2</sup> suivante : on a, au voisinage de l'infini,

$$g(x) \sim \frac{3x}{8}. \quad (12)$$

Ainsi, puisque  $x_0$  est «grand», on a

$$x_1 = g(x_0) = \frac{3x_0}{8}(1 + \varepsilon_1),$$

avec  $\varepsilon_1$  petit. De même, si  $x_1$  est encore «grand», on a

$$x_2 = g(x_1) = \frac{3^2}{8^2}x_0(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2),$$

avec  $\varepsilon_2$  petit. On a donc, tant que  $x_n$  est «grand»,

$$x_n = \frac{3x_{n-1}}{8}, \quad (13)$$

avec  $\varepsilon_{n-1}$  «petit», et donc

$$x_n = k^n x_0(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)\dots(1 + \varepsilon_n),$$

où  $k = 3/8$  et  $\varepsilon_n$  «petit». Tant que chacun des  $\varepsilon_i$  est petit et que le produit  $(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)\dots(1 + \varepsilon_n)$  reste proche de 1, la suite  $x_n$  se comporte donc comme une suite géométrique de raison plus petite que 1 et qui tend vers 0, avec un ordre égal à 1. Cela est confirmé par la dernière colonne du tableau 4, qui donne les valeurs de  $u_n = x_n/x_{n-1}$ , puisque  $3/8 = 0,375$ . Ainsi pour les petites valeurs de  $n$  (entre 1 et 13), la suite des itérés semble se comporter comme une suite tendant vers zéro avec un ordre égal à 1. La convergence vers  $\sqrt{A}$  avec un ordre 3 se manifeste à partir de  $n = 22$ .

- Si

$$x_0 = \sqrt{\frac{2\sqrt{3}-3}{3}} \times 5 = \beta = g^{-1}(0) \in J,$$

le comportement numérique de la suite (voir tableau 5 page 11) est différent de celui annoncé en question 4c, qui prévoit que  $x_1 = 0$ , et que  $x_2$  n'est pas défini. En fait, on observe que  $x_1 \approx -1.776356839400251 \times 10^{-15}$  est proche de zéro, à la précision machine,

<sup>2</sup>et, certes, pas très rigoureuse...

$n$	$x_n$	$e_n$
0	1	1,236067977
1	1	1,236067977
2	1	1,236067977
3	1	1,236067977

TAB. 1. Quelques valeurs de  $x_n$  et de  $e_n = |x_n - \sqrt{A}|$  pour  $x_0 = 1$ .

$n$	$x_n$	$e_n$
0	4	
1	2,388671875000000	$1,526038975002102 \times 10^{-1}$
2	2,236374428829627	$3,064513298367544 \times 10^{-4}$
3	2,236067977502667	$2,876809901408706 \times 10^{-12}$
4	2,236067977499789	$4,440892098500626 \times 10^{-16}$
5	2,236067977499790	0
6	2,236067977499789	$4,440892098500626 \times 10^{-16}$
7	2,236067977499790	0
8	2,236067977499789	$4,440892098500626 \times 10^{-16}$

TAB. 2. Quelques valeurs de  $x_n$  et de  $e_n = |x_n - \sqrt{A}|$  pour  $x_0 = 4$ .

mais non rigoureusement nul ; de fait,  $x_2 \approx 5.575186299632656 \times 10^{44}$  est défini et est «très grand». Ainsi, dans ce cas, en théorie, la suite tend ensuite vers  $\sqrt{A}$ , ce que l'on observe bien dans la tableau 5 : à partir de  $n = 105$  (quand la suite a «eu le temps de revenir vers des valeurs raisonnables), les valeurs de  $x_n$  se rapprochent très rapidement de  $\sqrt{A}$ . On retrouve en fait, le comportement observé dans le cas où  $x_0 = 10^{10}$ .

D'après (8) et (9), la convergence de la suite des itérés vers  $\sqrt{3}$  est théoriquement effective quand  $x_0$  appartient à l'intervalle  $]\alpha, +\infty[$ . Puisque  $\alpha$  n'est pas connu par l'utilisateur, il lui faudra choisir «au hasard»  $x_0$ . D'après les comportements observés, il faudra que  $x_0$  ne soit pas «trop grand» (pour ne pas ralentir la convergence) et qu'il ne soit pas non plus trop petit (pour éviter d'aboutir dans  $\mathbb{R}_-$ ).

### Correction de l'exercice 3.

(1) En posant  $y = \dot{x}$ , l'équation différentielle

$$\forall t \in [0, T], \quad \ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t), \quad (14)$$

s'écrit

$$\dot{y}(t) = f(t) - cy(t) - kx(t).$$

On obtient donc le système différentiel dans  $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, T], \quad \dot{x}(t) &= y(t), \\ \dot{y}(t) &= f(t) - cy(t) - kx(t). \end{aligned}$$



$n$	$x_n$	$e_n$
0	0, 1	
1	$-3,087462499999999 \times 10^3$	$3,085226432022500 \times 10^3$
2	$-1,157799652089545 \times 10^3$	$1,155563584112045 \times 10^3$
3	$-4,341781084339036 \times 10^2$	$4,319420404564038 \times 10^2$
4	$-1,628254276330029 \times 10^2$	$1,605893596555031 \times 10^2$
5	$-6,108256543933575 \times 10^1$	$5,884649746183595 \times 10^1$
6	$-2,296734064122076 \times 10^1$	$2,073127266372097 \times 10^1$
7	-8,775770125608158	6,539702148108368
8	-3,713602972344908	1,477534994845118
9	-2,341383323401646	$1,053153459018561 \times 10^{-1}$
10	-2,236173316364782	$1,053388649925324 \times 10^{-4}$
11	-2,236067977499906	$1,163513729807164 \times 10^{-13}$
12	-2,236067977499789	$4,440892098500626 \times 10^{-16}$
13	-2,236067977499790	$4,440892098500626 \times 10^{-16}$
14	-2,236067977499789	$4,440892098500626 \times 10^{-16}$
15	-2,236067977499790	$4,440892098500626 \times 10^{-16}$

TAB. 3. Quelques valeurs de  $x_n$  et de  $e_n = |x_n + \sqrt{A}|$  pour  $x_0 = 0, 1$ .

Si on considère la fonction vectorielle de  $[0, T]$  dans  $\mathbb{R}^2$  définie par

$$\forall t \in [0, T], \quad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},$$

on obtient donc l'équation différentielle (dans  $\mathbb{R}^2$ ) suivante

$$\boxed{\forall t \in [0, T], \quad \dot{X}(t) = F(t, X(t))}, \quad (15a)$$

avec les conditions initiales

$$\boxed{X(0) = X_0}. \quad (15b)$$

On a posé

$$X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ \dot{x}_0 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

$$\forall t \in [0, T], \quad \forall X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad F(t, X) = \begin{pmatrix} y \\ f(t) - kx - cy \end{pmatrix} \quad (17)$$

*Remarque 3.* En posant

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & -c \end{pmatrix},$$

$$\forall t \in [0, T], \quad G(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

on remarque que

$$\forall t \in [0, T], \quad \forall X \in \mathbb{R}^2, \quad F(t, X) = G(t) + AX. \quad (18)$$

$n$	$x_n$	$e_n$	$u_n$
0	$10^{10}$		
1	$3,750000000000000 \times 10^9$	$3,749999997763932 \times 10^9$	$3,750000000000000 \times 10^{-1}$
2	$1,406250000000000 \times 10^9$	$1,406249997763932 \times 10^9$	$3,750000000000000 \times 10^{-1}$
3	$5,273437500000000 \times 10^8$	$5,273437477639321 \times 10^8$	$3,750000000000000 \times 10^{-1}$
4	$1,977539062500000 \times 10^8$	$1,977539040139320 \times 10^8$	$3,750000000000000 \times 10^{-1}$
5	$7,415771484375002 \times 10^7$	$7,415771260768203 \times 10^7$	$3,750000000000001 \times 10^{-1}$
6	$2,780914306640631 \times 10^7$	$2,780914083033833 \times 10^7$	$3,750000000000007 \times 10^{-1}$
7	$1,042842864990250 \times 10^7$	$1,042842641383452 \times 10^7$	$3,750000000000048 \times 10^{-1}$
8	$3,910660743713797 \times 10^6$	$3,910658507645820 \times 10^6$	$3,750000000000345 \times 10^{-1}$
9	$1,466497778893633 \times 10^6$	$1,466495542825656 \times 10^6$	$3,750000000002453 \times 10^{-1}$
10	$5,499366670876695 \times 10^5$	$5,499344310196920 \times 10^5$	$3,750000000017437 \times 10^{-1}$
11	$2,062262501646950 \times 10^5$	$2,062240140967175 \times 10^5$	$3,750000000123996 \times 10^{-1}$
12	$7,733484382994454 \times 10^4$	$7,733260776196704 \times 10^4$	$3,750000000881745 \times 10^{-1}$
13	$2,900056648471964 \times 10^4$	$2,899833041674213 \times 10^4$	$3,750000006270192 \times 10^{-1}$
14	$1,087521256107768 \times 10^4$	$1,087297649310018 \times 10^4$	$3,750000044588032 \times 10^{-1}$
15	$4,078205055224975 \times 10^3$	$4,075968987247475 \times 10^3$	$3,750000317070441 \times 10^{-1}$
16	$1,529327815231499 \times 10^3$	$1,527091747253999 \times 10^3$	$3,750002254722656 \times 10^{-1}$
17	$5,735003827686088 \times 10^2$	$5,712643147911090 \times 10^2$	$3,750016033559138 \times 10^{-1}$
18	$2,150691823141584 \times 10^2$	$2,128331143366586 \times 10^2$	$3,750114015197313 \times 10^{-1}$
19	$8,066837930353493 \times 10^1$	$7,843231132603515 \times 10^1$	$3,750810712884939 \times 10^{-1}$
20	$3,029712290211558 \times 10^1$	$2,806105492461579 \times 10^1$	$3,755761943365080 \times 10^{-1}$
21	$1,148508284851649 \times 10^1$	$9,249014871016703$	$3,790816337783188 \times 10^{-1}$
22	$4,631353800820471$	$2,395285823320681$	$4,032494899606836 \times 10^{-1}$
23	$2,514998486165683$	$2,789305086658933 \times 10^{-1}$	$5,430374344797706 \times 10^{-1}$
24	$2,237735881157558$	$1,667903657768033 \times 10^{-3}$	$8,897563531217729 \times 10^{-1}$
25	$2,236067977963007$	$4,632170202967245 \times 10^{-10}$	$9,992546469810869 \times 10^{-1}$
26	$2,236067977499789$	$4,440892098500626 \times 10^{-16}$	$9,999999997928428 \times 10^{-1}$
27	$2,236067977499790$	0	1
28	$2,236067977499789$	$4,440892098500626 \times 10^{-16}$	$9,999999999999998 \times 10^{-1}$
29	$2,236067977499790$	0	1

TAB. 4. Quelques valeurs de  $x_n$ ,  $e_n = |x_n - \sqrt{A}|$  et  $u_n = x_n/x_{n-1}$  pour  $x_0 = 10^{10}$ .

- (2) Si  $f$  est assez régulière, alors la fonction  $F$  définie par (17) est «suffisamment» régulière par rapport au temps ; de plus, elle est lipschitzienne par rapport à sa seconde variable, uniformément en la première, puisque , selon (18), on a

$$\forall t \in [0, T], \quad \forall X_1, X_2 \in \mathbb{R}^2, \quad F(t, X_1) - F(t, X_2) = G(t) + AX_1 - G(t) - AX_2 = A(X_1 - X_2).$$

Si  $||| \cdot |||$  est une norme matricielle et  $|| \cdot ||$  une norme (quelconque) sur  $\mathbb{R}^2$ , on a donc

$$||F(t, X_1) - F(t, X_2)|| = ||G(t) + AX_1 - G(t) - AX_2|| \leq |||A||| ||X_1 - X_2||.$$

Le théorème de Cauchy-Lipschitz (voir théorème 5.3 page 196 du livre de cours) assure l'existence et l'unicité de la solution de (15).

- (3) En reprenant les notations de (15), on écrit les schémas d'Euler et de Runge Kutta (voir livre de cours, (5.7) page 199 et (5.21) page 207 ) sous la forme suivante : on pose pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$ ,  $h = T/N$  et pour tout  $i \in \{0, \dots, N\}$  :

$n$	$x_n$	$e_n$	$u_n$
0	$8,794900180765313 \times 10^{-1}$	1,356577959423259	
1	$-1,776356839400251 \times 10^{-15}$	2,236067977499792	$-2.019757817473803 \times 10^{-15}$
2	$5,575186299632656 \times 10^{44}$	$5,575186299632656 \times 10^{44}$	$-3.138550867693340 \times 10^{59}$
3	$2,090694862362246 \times 10^{44}$	$2,090694862362246 \times 10^{44}$	0,375
4	$7,840105733858422 \times 10^{43}$	$7,840105733858422 \times 10^{43}$	0,375
5	$2,940039650196908 \times 10^{43}$	$2,940039650196908 \times 10^{43}$	0,375
6	$1,102514868823841 \times 10^{43}$	$1,102514868823841 \times 10^{43}$	0,375
7	$4,134430758089402 \times 10^{42}$	$4,134430758089402 \times 10^{42}$	0,375
8	$1,550411534283526 \times 10^{42}$	$1,550411534283526 \times 10^{42}$	0,375
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
102	$1,410658445935731 \times 10^2$	$1,388297766160733 \times 10^2$	$3.750265038451471 \times 10^{-1}$
103	$5,292627394008029 \times 10^1$	$5,069020596258051 \times 10^1$	$3.751884383676784 \times 10^{-1}$
104	$1,991818492718831 \times 10^1$	$1,768211694968852 \times 10^1$	$3.763383182753125 \times 10^{-1}$
105	7,657194056224244	5,421126078724455	$3.844323207267836 \times 10^{-1}$
106	3,354222792475249	1,118154814975459	$4.380485551033838 \times 10^{-1}$
107	2,293018878916401	$5,695090141661119 \times 10^{-2}$	$6.836215185408920 \times 10^{-1}$
108	2,236085433773365	$1,745627357552237 \times 10^{-5}$	$9.751709653738480 \times 10^{-1}$
109	2,236067977499790	$4,440892098500626 \times 10^{-16}$	$9.999921933780743 \times 10^{-1}$
110	2,236067977499790	0	$9.999999999999998 \times 10^{-1}$
111	2,236067977499790	$4,440892098500626 \times 10^{-16}$	$9.999999999999998 \times 10^{-1}$

TAB. 5. Quelques valeurs de  $x_n$ ,  $e_n = |x_n - \sqrt{A}|$  et de  $u_n = x_n/x_{n-1}$  pour  $x_0 = \sqrt{\frac{2\sqrt{3}-3}{3}} \times 5$ .

– Les itérés d'Euler  $(X_i)_{0 \leq i \leq N}$  sont définis par

$$X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ \dot{x}_0 \end{pmatrix}, \quad (19a)$$

$$\forall i \in \{0, \dots, N-1\}, \quad X_{i+1} = Y_i + hF(t_i, X_i). \quad (19b)$$

– Les itérés de Runge Kutta 2  $(X_i)_{0 \leq i \leq N}$  sont définis par

$$X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ \dot{x}_0 \end{pmatrix}, \quad (20a)$$

$$\forall i \in \{0, \dots, N-1\}, \quad X_{i+1} = X_i + \frac{1}{2}(K_1 + K_2), \quad (20b)$$

$$\text{avec } \begin{cases} K_1 = hF(t_i, X_i), \\ K_2 = hF(t_i + h, X_i + K_1). \end{cases} \quad (20c)$$

On notera que la première composante  $X_i^1$  de  $X_i$  est une approximation de  $x(t_i)$  et la seconde composante  $X_i^2$  de  $X_i$  est une approximation de  $\dot{x}(t_i)$ .

On pourra consulter le source matlab `trace_finalexo3.m` fourni : il résout numériquement l'équation différentielle particulière

$$\forall t \in [0, T], \quad \ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f \cos(\omega t), \quad (21a)$$

avec les conditions initiales

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0. \quad (21b)$$

schéma	$\max_{i \in \{0, \dots, N\}}  x(t_i) - X_i^1 $	$\max_{i \in \{0, \dots, N\}}  \dot{x}(t_i) - X_i^2 $
Euler	$9.5477 \times 10^{-1}$	1.8684
Runge-Kutta 2	$5.0295 \times 10^{-2}$	$1.0260 \times 10^{-1}$
Runge-Kutta 4	$9.6743 \times 10^{-5}$	$2.0878 \times 10^{-4}$

TAB. 6. Quelques erreurs pour les paramètres (22) et pour  $N = 100$ .

schéma	$\max_{i \in \{0, \dots, N\}}  x(t_i) - X_i^1 $	$\max_{i \in \{0, \dots, N\}}  \dot{x}(t_i) - X_i^2 $
Euler	$7.3980 \times 10^{-3}$	$1.4503 \times 10^{-2}$
Runge-Kutta 2	$4.8354 \times 10^{-6}$	$1.0006 \times 10^{-5}$
Runge-Kutta 4	$9.42138 \times 10^{-13}$	$2.0135 \times 10^{-12}$

TAB. 7. Quelques erreurs pour les paramètres (22) et pour  $N = 10000$ .

L'utilisateur peut choisir les paramètres  $c$ ,  $k$ ,  $f$ ,  $\omega$ ,  $T$  et  $N$ . la fonction matlab utilise le formalisme vectoriel (19) et (20).

La fonction fournie donne aussi les approximations de  $x$  et de  $\dot{x}$  fournies par les schéma d'Euler, de Runge-Kutta 2 et 4, ainsi que les erreurs, en utilisant la solution exacte et sa dérivée de (20), déterminées en matlab symbolique. (voir fonctions `resoutform_equadiff01.m`, `solution_exacte_01` et `solution_exactep_01`).

Par exemple, pour

$$x_0 = -2, \quad \dot{x}_0 = 10, \quad c = 1, \quad k = 4, \quad f = 1, \quad \omega = 0.5, \quad T = 10, \quad (22)$$

et pour  $N = 100$  et  $N = 10000$ , on obtient les erreurs indiquées dans le tableau 6 et 7 et les courbes 3 page ci-contre et 4 page suivante.

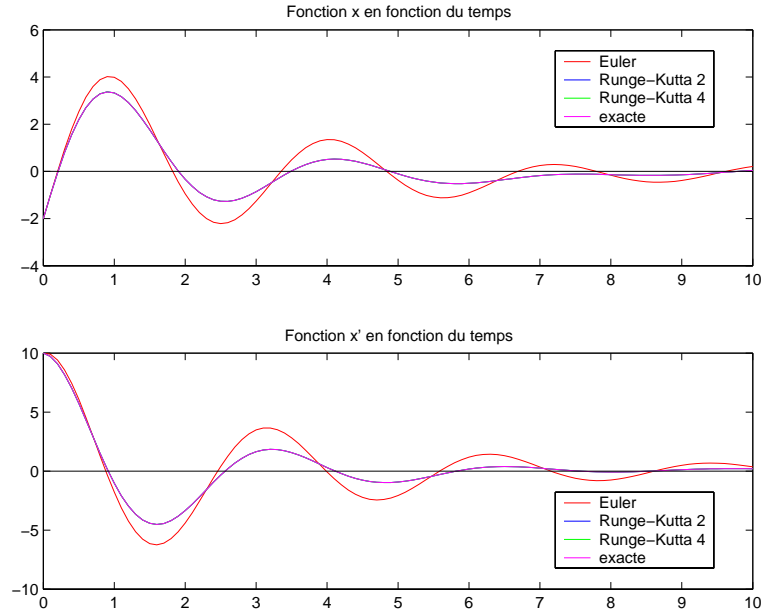


FIG. 3. Les solutions de (21) exacte et approchées pour les paramètres (22) et pour  $N = 100$ .

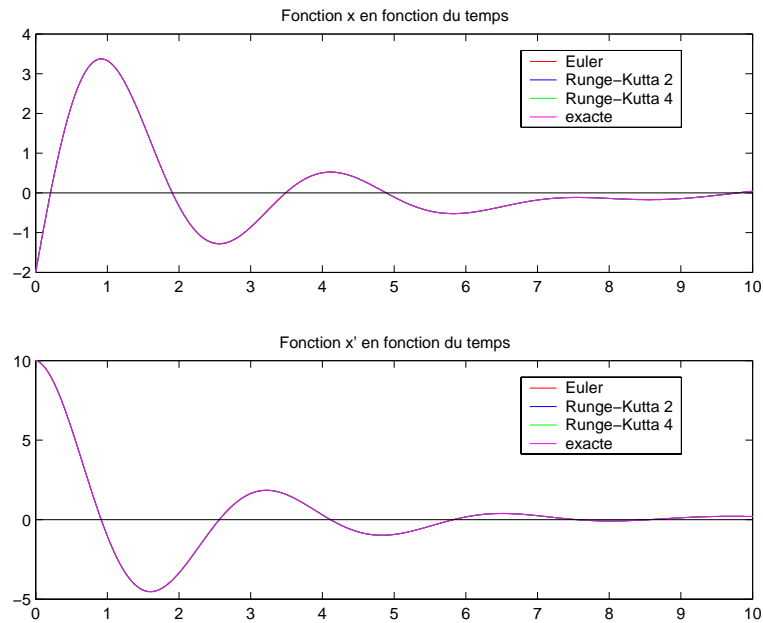


FIG. 4. Les solutions de (21) exacte et approchées pour les paramètres (22) et pour  $N = 10000$ .