MT40 Automne 2005

Corrigé de l'examen final du 18 janvier 2006

Correction de l'exercice 1.
Non rédigée actuellement.

Correction de l'exercice 2.
On pourra consulter l'article de la wikipédia encyclopédie à l'adresse `http://en.wikipedia.org/wiki/Methods_of_computing_square_roots#Babylonian_method`.

(1) On écrit l'équation

$$x^2 - a = 0. \tag{1}$$

sous la forme d'équation de point fixe :

$$\frac{a}{x} = x. \tag{2}$$

La méthode du point fixe s'écrit

$$x_{n+1} = g(x_n). \tag{3}$$

où

$$\forall x, \quad g(x) = \frac{a}{x}. \tag{4}$$

Cette méthode donne

$$x_1 = g(x_0) = \frac{a}{x_0},$$

puis

$$x_2 = g(x_1) = \frac{a}{\frac{a}{x_0}} = x_0,$$

puis

$$x_3 = g(x_2) = \frac{a}{x_0}.$$

Donc, par récurrence, on peut montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{2n} = x_0, \quad x_{2n+1} = \frac{a}{x_0}.$$

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne saurait donc converger, sauf dans le cas où $x_0 = a/x_0$, c'est-à-dire si $x_0 = \sqrt{a}$: il faut déjà connaître la valeur recherché, $\sqrt{a}$, pour l'approcher !

(2) (a) D'après le cours (voir exercice 4.4, traité en TD et théorèmes 4.29 et 4.31 de [BM03]), on sait que la méthode itérative (de Newton appliquée à la recherche des racines de (1)) définie par

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}_+^*, \\ \\ x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{a}{x_n}\right). \end{cases} \tag{5}$$

est convergente pour tout élément x_0 de $\mathbb{R}_+^*$. De plus, l'ordre de convergence de cette méthode est égal à 2.

(b) On a réalisé les simulations numériques avec

$$a = 2, \quad x_0 = 1, \tag{6a}$$
$$a = 2 \times 10^4, \quad x_0 \in \{10^{-2}, 10^2\}, \tag{6b}$$
$$a = 2 \times 10^8, \quad x_0 \in \{10^{-4}, 10^4\}. \tag{6c}$$

Grâce à la fonction fournie `compar_methode_newton.m`, Nous avons calculé les valeurs x_n et les erreurs $\left|x_n^2 - a\right|$ (calculs réalisés sous matlab).

n	x_n	$\left\|x_n^2 - a\right\|$
0	1.000000000000	1.0000
1	1.500000000000	2.5000×10^{-1}
2	1.416666666666	6.9444×10^{-3}
3	1.414215686274	6.0073×10^{-6}
4	1.414213562374	4.5106×10^{-12}
5	1.414213562373	4.4408×10^{-16}
6	1.414213562373	4.4408×10^{-16}
7	1.414213562373	4.4408×10^{-16}

TAB. 1. Les valeurs x_n et les erreurs $\left|x_n^2 - a\right|$ pour $a = 2$ et $x_0 = 1$

Voir les tableaux 1, 2 page suivante et 3 page suivante. On constate que l'erreur semble tendre vers zéro, et ce d'autant plus rapidement si x_0 est «grand» (plus précisément, proche de $\sqrt{a}$). Les simulations correspondant à (6c) n'ont pas été données mais elles mettent en évidence le même phénomène.

(3) On cherche maintenant une autre méthode que la méthode de la question 2. On remarque que la méthode (5) correspond à la méthode de Newton appliquée à la recherche des racines de $f(x) = x^2 - a$.

(a) Il est clair que l'unique racine, sur $\mathbb{R}_+^*$, de la fonction h définie par

$$h(x) = \frac{1}{x^2} - a, \tag{7}$$

est $1/\sqrt{a}$.

n	x_n	$\lvert x_n^2 - a\rvert$
0	$1.000000000000 \times 10^{-2}$	1.9999×10^{4}
1	$1.000000005000 \times 10^{6}$	9.9999×10^{11}
2	$5.000000125000 \times 10^{5}$	2.4999×10^{11}
3	$2.500000262499 \times 10^{5}$	6.2499×10^{10}
4	$1.250000531249 \times 10^{5}$	1.5624×10^{10}
5	$6.250010656246 \times 10^{4}$	3.9062×10^{9}
6	$3.125021328095 \times 10^{4}$	9.7655×10^{8}
7	$1.562542663829 \times 10^{4}$	2.4413×10^{8}
8	$7.813353301673 \times 10^{3}$	6.1028×10^{7}
9	$3.907956511046 \times 10^{3}$	1.5252×10^{7}
10	$1.956537137632 \times 10^{3}$	3.8080×10^{6}
11	$9.833796397015 \times 10^{2}$	9.4703×10^{5}
12	$5.018588325049 \times 10^{2}$	2.3186×10^{5}
13	$2.708553383491 \times 10^{2}$	5.3362×10^{4}
14	$1.723477463676 \times 10^{2}$	9.7037×10^{3}
15	$1.441960998201 \times 10^{2}$	7.9251×10^{2}
16	$1.414480532213 \times 10^{2}$	7.5517
17	$1.414213587567 \times 10^{2}$	7.1259×10^{-4}
18	$1.414213587567 \times 10^{2}$	0

TAB. 2. Les valeurs x_n et les erreurs $\lvert x_n^2 - a\rvert$ pour $a = 2 \times 10^4$ et $x_0 = 10^{-2}$

n	x_n	$\lvert x_n^2 - a\rvert$
0	$1.000000000000 \times 10^{2}$	1.0000×10^{4}
1	$1.500000000000 \times 10^{2}$	2.5000×10^{3}
2	$1.416666666666 \times 10^{2}$	6.9444×10^{1}
3	$1.414215686274 \times 10^{2}$	6.0073×10^{-2}
4	$1.414213562374 \times 10^{2}$	4.5107×10^{-8}
5	$1.414213562373 \times 10^{2}$	0

TAB. 3. Les valeurs x_n et les erreurs $\lvert x_n^2 - a\rvert$ pour $a = 2 \times 10^4$ et $x_0 = 10^2$

(b) Si h est définie par (7), on a

$$h'(x) = -2x^{-3}. \tag{8}$$

La méthode de Newton appliquée à la recherche des racines de h s'écrit

$$x_{n+1} = g(x_n), \tag{9}$$

où

$$g(x) = x - \frac{h(x)}{h'x)} = x + \frac{x^{-2} - a}{2x^{-3}},$$

soit, après simplification,

$$\boxed{\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}_+^*, \\ x_{n+1} = g(x_n). \end{cases}} \tag{10}$$

où

$$\boxed{\forall x, \quad g(x) = \frac{1}{2} x \left(3 - a x^2\right).} \tag{11}$$

(c) Si la méthode définie par (10)-(11) est convergente vers $l > 0$, on sait, d'après le cours, puisque g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, que

$$g(l) = l, \tag{12}$$

ce qui implique

$$\frac{1}{2} l \left(3 - a l^2\right) = l,$$

et donc, puisque l est strictement positif $l = 1/\sqrt{a}$. On a donc, si (x_n) est convergente vers un nombre strictement positif,

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} x_n = \frac{1}{\sqrt{a}}.} \tag{13}$$

(d) On en déduit immédiatement

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} a x_n = \sqrt{a}.} \tag{14}$$

Cette égalité implique donc que l'on peut approcher $\sqrt{a}$. Cette égalité est plus exploitable que (13), où seul l'inverse de $\sqrt{a}$ est fourni.

(e) À chaque itération, la méthode (5) implique le calcul de l'inverse de x_n, ce qui n'a pas lieu pour le calcul des itérés de la méthode (10)-(11). D'après (14), on donc une méthode qui permet d'approcher $\sqrt{a}$ sans aucun calcul d'inverse [1] !

Remarque 1. Une étude plus précise de la méthode (10)-(11) (fondée sur le fait, qu'en notation flottante, une multiplication moins complexe qu'une division) nous montrerait aussi sa moindre complexité que la méthode (5) (voir wikipédia, url indiquée page 1).

(f) On sait que la méthode (10)-(11) est une méthode particulière de newton et donc, s'il y a convergence,

$$\boxed{\text{la méthode (10)-(11) est d'ordre 2.}} \tag{15}$$

Remarque 2. On peut aussi s'en convaincre en remarquant que

$$\begin{aligned} g\left(1/\sqrt{a}\right) &= 1/\sqrt{a}, \\ g'\left(1/\sqrt{a}\right) &= 0, \\ g''\left(1/\sqrt{a}\right) &\neq 0, \end{aligned}$$

et en utilisant le théorème D.5 page 368 de [BM03].

(g) Étudions maintenant si la méthode (10)-(11) est effectivement convergente.

[1] Il est vrai que cet avantage était primordial quand on faisait les calculs à la main ....

(i) On vérifie rapidement (par récurrence) que

$$\boxed{\forall x_0 \in \{0, \sqrt{3/a}\}, \quad \forall n \geq 1, \quad x_n = 0,} \tag{16}$$

et que

$$\boxed{x_0 = \sqrt{1/a}, \Longrightarrow \forall n \geq 1, \quad x_n = \sqrt{1/a},} \tag{17}$$

En terme de convergence vers $\sqrt{1/a}$, seul le cas (17) est donc intéressant.

(ii) On a

$$\forall x, \quad g'(x) = \frac{3}{2}\left(1 - ax^2\right), \tag{18}$$

dont on déduit le tableau de variation de g sur $[0, \sqrt{3/a}]$

x	0		$\sqrt{1/a}$		$\sqrt{3/a}$
$g'(x)$	$3/2$	$+$	0	$-$	-3
$g(x)$	0	$\nearrow$	$\sqrt{1/a}$	$\searrow$	0

On en déduit donc que

$$\boxed{g\left(\left]0, \sqrt{1/a}\right]\right) \subset \left]0, \sqrt{1/a}\right],} \tag{19a}$$

$$\boxed{g\left(\left]0, \sqrt{3/a}\right[\right) \subset \left]0, \sqrt{1/a}\right].} \tag{19b}$$

(iii) D'après (19b), si x_0 appartient à $\left]0, \sqrt{3/a}\right[$, alors $x_1 = g(x_0)$ appartient à $\left]0, \sqrt{1/a}\right]$; d'après (19a), $x_2 = g(x_1)$ appartient de nouveau à $\left]0, \sqrt{1/a}\right]$ et on montre par récurrence sur n que

$$\boxed{\forall x_0 \in \left]0, \sqrt{3/a}\right[, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x_n \in \left]0, \sqrt{1/a}\right].} \tag{20}$$

(iv) On a, pour tout réel x

$$\forall x, \quad g(x) - x = \frac{x}{2}\left(1 - ax^2\right), \tag{21}$$

quantité positive sur $\left]0, \sqrt{1/a}\right]$. D'après (20), il vient donc, pour tout $n \geq 1$, $0 \leq g(x_n) - x_n = x_{n+1} - x_n$. La suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est donc croissante ; d'après (20) elle est majorée ; on en déduit donc qu'elle converge vers un réel l.

D'après (20), ce réel est positif ou nul [2] ; puisque la suite est croissante et que $x_0 > 0$, l est strictement positif. On applique enfin le résultat de la question 3c. On

[2] ne pas dire strictement positif !

en déduit donc, pour tout $x_0 \in]0, \sqrt{3/a}[$,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} x_n = 1/\sqrt{a}.} \tag{22}$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} ax_n = \sqrt{a}.} \tag{23}$$

(h) Grâce à la fonction fournie `compar_methode_newton.m`, Nous avons calculé les valeurs ax_n^2 et les erreurs $\left|(ax_n)^2 - a\right|$ sur les valeurs numérique correspondant à question 2b.

n	ax_n	$\lvert ax_n{}^2 - a\rvert$
0	2.000000000000	1.0000
1	1.000000000000	4.3750×10^{-1}
2	1.250000000000	7.7011×10^{-2}
3	1.386718750000	2.2525×10^{-3}
4	1.413416936993	1.9034×10^{-6}
5	1.414212889391	1.3586×10^{-12}
6	1.414213562372	4.4408×10^{-16}
7	1.414213562373	4.4408×10^{-16}

TAB. 4. Les valeurs ax_n et les erreurs $\left|(ax_n)^2 - a\right|$ pour $a = 2$ et $x_0 = 1$

n	ax_n	$\lvert ax_n{}^2 - a\rvert$
0	$2.000000000000 \times 10^2$	2.0000×10^4
1	$1.000000000000 \times 10^2$	1.0000×10^4
2	$1.250000000000 \times 10^2$	4.3750×10^3
3	$1.386718750000 \times 10^2$	7.7011×10^2
4	$1.413416936993 \times 10^2$	2.2525×10^1
5	$1.414212889391 \times 10^2$	1.9034×10^{-2}
6	$1.414213562372 \times 10^2$	1.3584×10^{-8}
7	$1.414213562373 \times 10^2$	0

TAB. 5. Les valeurs ax_n et les erreurs $\left|(ax_n)^2 - a\right|$ pour $a = 2 \times 10^4$ et $x_0 = 10^{-2}$

Voir les tableaux 4, 5 et 6 page suivante.

On constate que le résultat (23) semble être corroboré. Les simulations correspondant à (6c) n'ont pas été données mais elles mettent en évidence le même phénomène.

Si le réel a est «grand», la seconde méthode semble plus rapidement convergente si x_0 majoré par $\sqrt{3/a}$: comparez les tableaux 2 et 5. Dans ce cas, il y a bien convergence ; En effet si $a = 2 \times 10^p$, alors on vérifie que si $x_0 = 10^{-p/2}$ est strictement majoré par $\sqrt{3/a}$.

(4) Le comportement de la suite (x_n) quand si x_0 est choisi dans $\mathbb{R}$ est plus difficile à établir. On montre, en annexe A, que la suite est correctement définie pour toute valeur de n et de x_0 et

n	ax_n	$\left\|{ax_n}^2-a\right\|$
0	$2.000000000000 \times 10^6$	3.9999×10^{12}
1	$-1.999999970000 \times 10^{14}$	3.9999×10^{28}
2	$1.999999910000 \times 10^{38}$	3.9999×10^{76}
3	$-1.999999730000 \times 10^{110}$	3.9999×10^{220}
4	Inf	Inf
5	-Inf	Inf

TAB. 6. Les valeurs ax_n et les erreurs $\left|(ax_n)^2-a\right|$ pour $a = 2 \times 10^4$ et $x_0 = 10^2$

que :

$$\begin{cases} x_0 \in]0, \sqrt{3/a}[& \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 1/\sqrt{a}, \\ x_0 \in]-\sqrt{5/a}, 0] \cup [\sqrt{3/a}, \sqrt{5/a}[& \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = l, \text{avec } l \in \{-\sqrt{1/a}, \sqrt{1/a}, 0\} \\ |x_0| = \sqrt{5/a} & \Longrightarrow \forall n, \quad x_n = (-1)^n x_0, \\ |x_0| \in]\sqrt{5/a}, +\infty[& \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} |x_n| = +\infty. \end{cases} \tag{24}$$

Le cas le plus favorable à la convergence de x_n vers $1/\sqrt{a}$ est donc le premier.

Donnons quelques simulations faites en prenant quelques valeurs de x_0 dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{L}$, «la limite obtenue numériquement», c'est-à-dire la valeur de x_n pour un n assez grand, quand cette suite s'est «stabilisée» (ce qui signifie $x_{n+1} - x_n$ assez petit). Les calculs ont de nouveau été réalisés grâce à la fonction `compar_methode_newton.m`.

a	x_0	$\mathcal{L}$	position de x_0
2	0.7071067	1.414213562373095	$x_0 \in]0, a_1[$
2	1.22	1.414213562373095	$x_0 \in]a_1, a_3[$
2	1.23	-1.414213562373095	$x_0 \in]a_3, a_5[$
2	1.58	1.414213562373095	$x_0 \in]a_3, a_5[$
2	1.58	1.414213562373095	$x_0 \in]a_3, a_5[$
2	1.581138830084190	$+\infty$	$x_0 = a_5$
2×10^4	1.22×10^{-2}	$1.414213562373095 \times 10^2$	$x_0 \in]0, a_1[$
2×10^4	1.58×10^{-2}	1.414213562373095	$x_0 \in]a_3, a_5[$
2×10^4	1.59×10^{-2}	$+\infty$	$x_0 > a_5$

TAB. 7. Quelques valeurs de a, x_0, la limite $\mathcal{L}$ obtenue numériquement pour quelques valeurs de a et la position de x_0 par rapport à $a_1 = \sqrt{1/a}$, $a_3 = \sqrt{3/a}$ et $a_5 = \sqrt{5/a}$.

Voir le tableau 7 où a été indiquée, à chaque fois, la position de x_0 par rapport à $a_1 = \sqrt{1/a}$, $a_3 = \sqrt{3/a}$ et $a_5 = \sqrt{5/a}$.

Les résultats observés sont bien conformes à ce que prévoit (24), sauf dans le cas où $x_0 = a_5$: dans ce cas, on observe une valeur infinie de x_n pour n assez grand, au lieu de trouver deux sous-suites x_{2n} et x_{2n+1} extraites. La troncature numérique arrondit probablement une des premières valeurs de $|x_n|$ à une valeur légèrement supérieure à $|\sqrt{5/a}|$, ce qui implique dans ce cas une divergence de la suite $(|x_n|)$.

x_0	numéro du graphe
1.2	1(a)
1.23	1(b)
1.58	1(c)
1.581138830084190	1(d)
$\sqrt{5/2}$ (symbolique)	1(e)

TAB. 8. Les premières valeurs de la suite (x_n) pour $a = 2$ et quelques valeurs de x_0 reportées sur le graphe $y = g(x)$.

Les premières valeurs de la suite (x_n) ont aussi été indiquées sur le graphe $y = g(x)$ pour $a = 2$ et quelques valeurs de x_0 indiquées dans le tableau 8. Ces courbes ont été obtenues grâce à la fonction `demo_trace_iteration_point_fixe`. Voir la figure 1 page suivante.

Les résultats graphiques confirment les résultats du tableau 7 page précédente. De plus, si la valeur $x_0 = \sqrt{5/2}$ est déclarée en symbolique (voir figure 1(e)), le comportement est bien celui prévu par la théorie, sans erreur d'arrondi.

Annexe A. Étude de la suite (x_n) définie par (10) et (11) pour x_0 dans $\mathbb{R}$

Cette étude se fait en plusieurs étapes.

(1) Remarquons tout d'abord que, puisque g est définie sur tout $\mathbb{R}$, la suite est correctement définie pour toute valeur de n et de x_0.

(2) Récapitulons ce qui a déjà été démontré :

$$\begin{cases} x_0 \in]0, \sqrt{3/a}[& \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 1/\sqrt{a}, \\ x_0 \in \{0, \sqrt{3/a}\} & \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0. \end{cases} \tag{25}$$

Puisque la fonction g est impaire, on démontre aisément à partir de (25), que l'on a :

$$\begin{cases} x_0 \in]-\sqrt{3/a}, 0[& \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = -1/\sqrt{a}, \\ x_0 = -\sqrt{3/a} & \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0. \end{cases} \tag{26}$$

(3) Étudions la fonction g sur $\mathbb{R}$. Puisqu'elle est impaire, il suffit de l'étudier sur $\mathbb{R}_+$. D'après (18), la fonction g' est positive sur $[-\sqrt{1/a}, \sqrt{1/a}]$ et on déduit son tableau de variation sur $\mathbb{R}_+$:

x	0		$\sqrt{1/a}$		$+\infty$
$g'(x)$	$3/2$	$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$\sqrt{1/a}$	$\searrow$	$-\infty$

Puisque g s'annulle en $\sqrt{3/a}$, on en déduit son tracé sur $\mathbb{R}$ (voir figure 2 page 10).

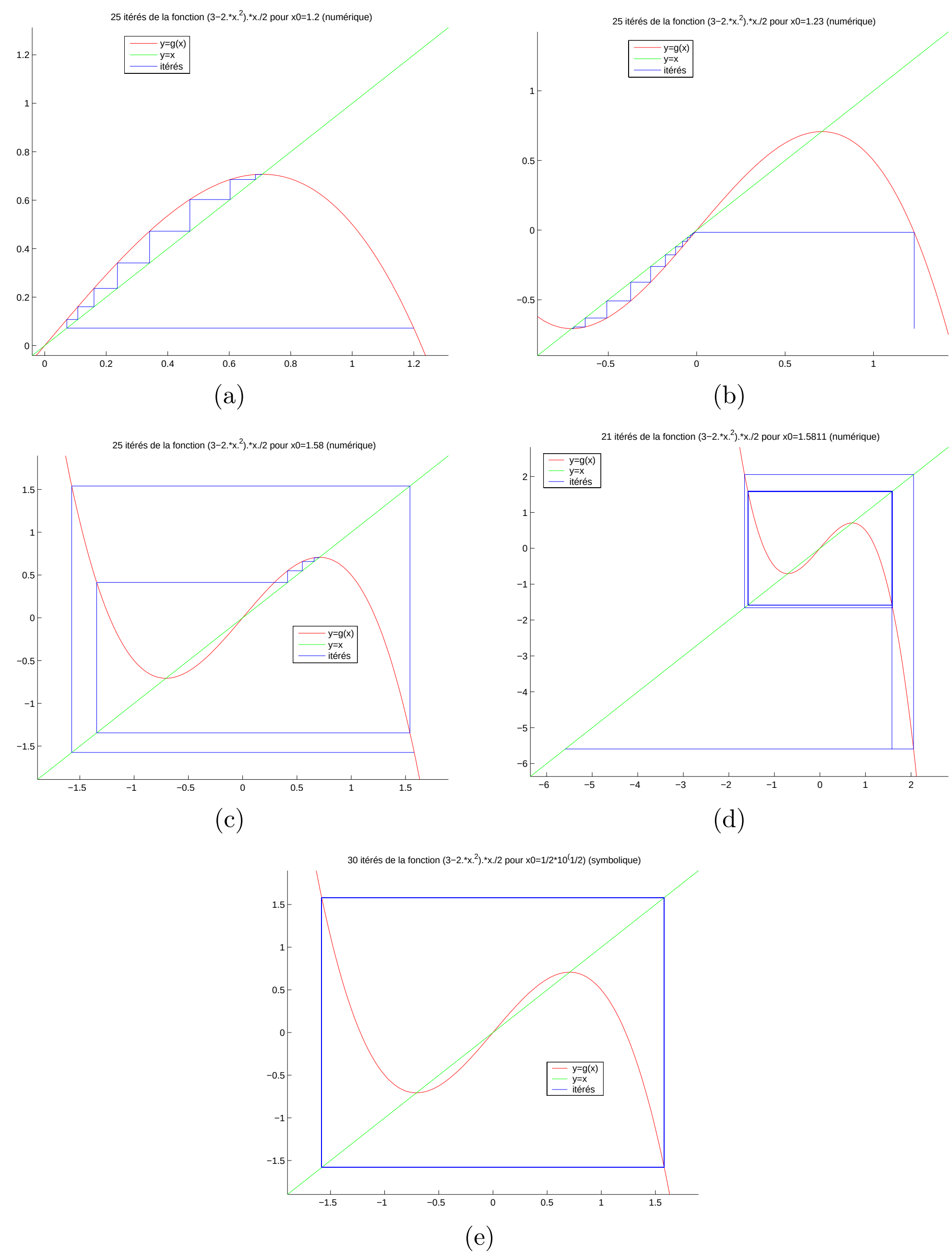

FIG. 1. Les premières valeurs de la suite (x_n) pour $a = 2$ et quelques valeurs de x_0 reportées sur le graphe $y = g(x)$.

(4) Étudions la fonction $|g(x)/x|$ sur $\mathbb{R}$ (prolongée par $3/2$ en zéro). Puisqu'elle est impaire, il suffit de l'étudier sur $\mathbb{R}_+$. On a, pour tout x,

$$\left|\frac{g(x)}{x}\right| = \frac{1}{2}\left|3 - ax^2\right|.$$

On en déduit son tableau de variation sur $\mathbb{R}_+$:

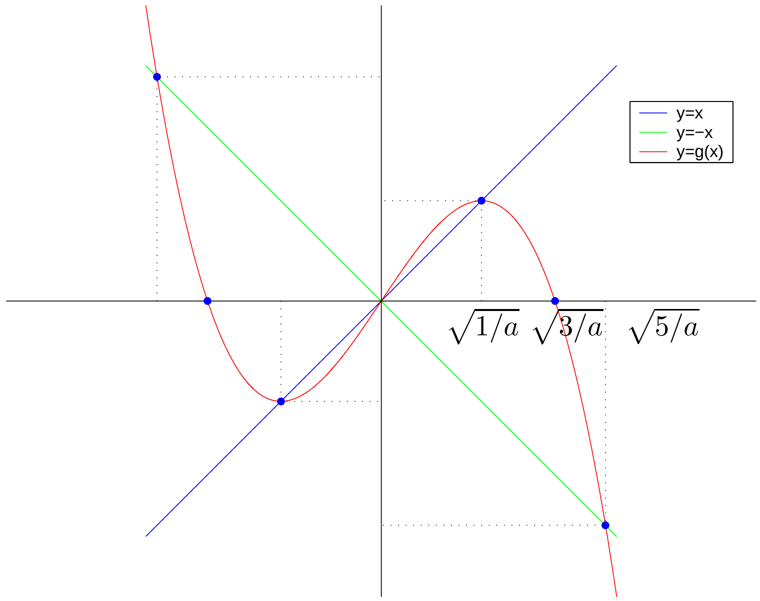

FIG. 2. Les fonctions $x \mapsto -x$, $x \mapsto x$ et $x \mapsto g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

x	0		$\sqrt{1/a}$		$\sqrt{3/a}$		$\sqrt{5/a}$		$+\infty$
$\lvert g(x)/x\rvert$	$3/2$	$\searrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

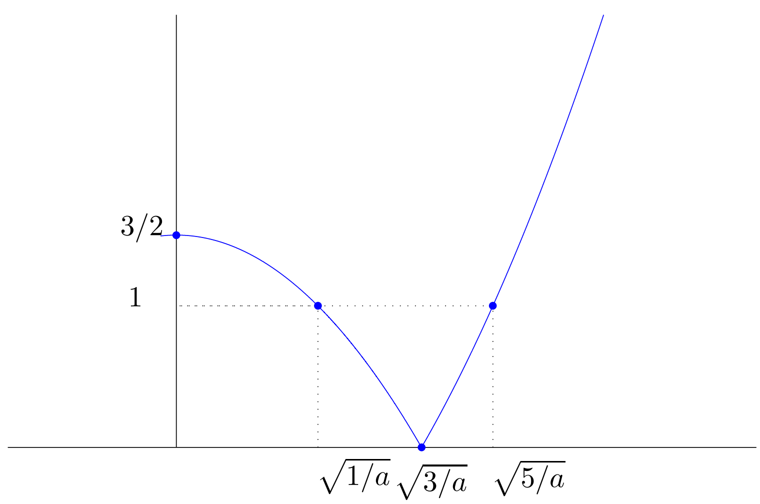

FIG. 3. La fonction $x \mapsto |g(x)/x|$ sur $\mathbb{R}_+$.

Puisque g s'annulle en $\sqrt{3/a}$, on en déduit son tracé sur $\mathbb{R}$ (voir figure 3).

(5) On vérifie aisément, grâce au point précédent, que l'ensemble des solutions de $|g(l)| = |l|$ est $\{0, \pm\sqrt{1/a}, \pm\sqrt{5/a}\}$.

(6) Commençons maintenant l'étude proprement dite de la suite (x_n) définie par (10) et (11) pour $|x_0| \geq \sqrt{3/a}$.

(a) Supposons $|x_0| > \sqrt{5/a}$.

D'après l'étude du point 4, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| > \sqrt{5/a} \Longrightarrow |g(x)| > |x|\sqrt{5/a}. \tag{27}$$

On en déduit donc par récurrence sur n que $|x_n| > \sqrt{5/a}$. Si on applique de nouveau (27), on en déduit que la suite $|x_n|$ est croissante.

D'autre part, on vérifie grâce à l'étude du point 3 que si $x < -\sqrt{5/a}$, alors $g(x) > \sqrt{5/a}$ et que $g(g(x)) < -\sqrt{5/a}$. De même, si $x > \sqrt{5/a}$, alors $g(x) < \sqrt{5/a}$ et $g(g(x)) > \sqrt{5/a}$. On en déduit donc par récurrence que x_{2n} est du signe de x_0 tandis que x_{2n+1} est du signe de $-x_0$. Ainsi, d'après ce qui précède, la suite $x_0 x_{2n}$ est croissante tandis que la suite $x_0 x_{2n+1}$ est décroissante.

Chacune des deux suite (x_{2n}) et (x_{2n+1}) ne saurait converger. Si c'était le cas, pour la première d'entre elles, par exemple, d'après le point 5, sa limite l serait 0, $\pm\sqrt{1/a}$ ou $\pm\sqrt{5/a}$. Chacun de ces nombres est, en module, inférieur ou égal à $\sqrt{5/a}$. Or, $|x_{2n}|$ est croissante et minorée par $|x_0|$, lui même strictement supérieur à $\sqrt{5/a}$. On a donc $l > \sqrt{5/a}$, ce qui est contradictoire. Ainsi, la suite $(|x_n|)$ est croissante et divergente ; elle tend donc vers l'infini ; ainsi chacune des deux suites $(x_0 x_{2n})$ et $(x_0 x_{2n+1})$ tend respectivement vers $+\infty$ et $-\infty$.

(b) Si $x_0 = \pm\sqrt{a/5}$, alors on vérifie aisément que $x_1 = \mp\sqrt{a/5}$ et que $x_2 = \pm\sqrt{a/5}$. On en déduit donc que $x_{2n} = x_0$ et que $x_{2n+1} = -x_0$.

(c) Traitons maintenant l'unique cas non étudié : $\sqrt{3/a} < |x_0| < \sqrt{5/a}$.

On vérifie , grâce au point 3, que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |g(x)| < \sqrt{5/a} \Longrightarrow |g(x)| < \sqrt{5/a},$$

ce qui implique

$$\forall n, \quad |x_n| < \sqrt{5/a}. \tag{28}$$

Puisque $\sqrt{3/a} < |x_0| < \sqrt{5/a}$, on déduit du point 4 que $|x_1|/|x_0| = |g(x_0)|/|x_0| < 1$ et donc que $|x_1| < |x_0|$.

Nous avons deux possibilités :

- Si $|x_1| \leq \sqrt{3/a}$, alors d'après (25) et (26), (où x_1 prend la place de x_0), la suite (x_n) converge vers $l \in \{\sqrt{1/a}, -\sqrt{1/a}, 0\}$.
- Si $|x_1| > \sqrt{3/a}$, alors, on déduit de nouveau du point 4 que $|x_2|/|x_1| = |g(x_1)|/|x_1| < 1$ et donc que $|x_2| < |x_1|$.

  Nous avons de nouveau deux possibilités :

  - Si $|x_2| \leq \sqrt{3/a}$, alors d'après (25) et (26), (où x_2 prend la place de x_0), la suite (x_n) converge vers $l \in \{\sqrt{1/a}, -\sqrt{1/a}, 0\}$.
  - Si $|x_2| > \sqrt{3/a}$, alors, on déduit de nouveau du point 4 que $|x_3|/|x_2| = |g(x_2)|/|x_2| < 1$ et donc que $|x_3| < |x_2|$.

On montre donc, par récurrence, que nous avons l'une des deux possibilités suivantes :

- Soit :

$$\forall n, \quad |x_{n+1}| < |x_n| \text{ et } |x_n| > \sqrt{3/a}\ ; \tag{29}$$

- Soit, il existe $n_0 \geq 0$ tel que

$$|x_{n_0}| \leq \sqrt{3/a}. \tag{30}$$

Dans le second cas, d'après (25) et (26), (où x_{n_0} prend la place de x_0), la suite (x_n) converge vers $l \in \{\sqrt{1/a}, -\sqrt{1/a}, 0\}$.
Le premier cas est, en fait, impossible. Remarquons que, puisque g est impaire, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g\left(|x|\right) = g\left(\pm x\right) = \mp g(x),$$

et donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |g\left(|x|\right)| = |g(x)|. \tag{31}$$

D'après (29), la suite $(|x_n|)$ est décroissante et minorée par une constante strictement positive ; elle converge donc vers $l > 0$. Par définition et grâce à (31),

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |x_{n+1}| = |g(x_n)| = \left|g\left(|x_n|\right)\right|,$$

et, puisque les fonctions $|.|$ et g sont continues, il vient en passant à la limite $n \to +\infty$

$$|l| = \left|g(|l|)\right|.$$

De nouveau (31) implique

$$|l| = |g(l)|.$$

Ainsi, $|g(l)/l| = 1$ et d'après le point 4, on a nécessairement

$$|l| \in \left\{\sqrt{1/a}, \sqrt{5/a}\right\}. \tag{32}$$

D'après (28) et (29), pour tout n, $|x_n| < |x_0| < \sqrt{5/a}$ ce qui implique à la limite que

$$|l| < \sqrt{5/a}. \tag{33}$$

D'après (32) et (33), la seule possibilité est

$$|l| = \sqrt{1/a},$$

ce qui est de nouveau impossible, puisque (29) implique

$$\forall n, \quad |l| \geq \sqrt{3/a}.$$

Bref, dans le cas 6c, la suite (x_n) converge vers $l \in \{\sqrt{1/a}, -\sqrt{1/a}, 0\}$; cette suite $|x_n|$ est d'abord strictement décroissante en étant strictement supérieure à $|\sqrt{3/a}|$. Puis, elle devient inférieure à $|\sqrt{3/a}|$.

On a donc démontré le résultat annoncé (24).

.

Références

[BM03] Jérôme Bastien et Jean-Noël Martin. *Introduction à l'analyse numérique ; applications sous matlab*. Dunod, Paris, 2003.