MT40 Automne 2005

Examen de TD(2) du 29 novembre 2005

Durée : 1,5 heure(s)

Tout document autorisé (sauf le livre)- Calculatrice autorisée.

Exercice 1 (Interpolation)**.**
Dans cet exercice, nous montrons qu'il est possible d'étendre la notion de différences divisées ainsi que celle de polynôme interpolateur à un support $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ quelconque.
Nous étudierons d'abord le cas $n = 1$, ensuite $n = 2$; nous admettrons que les propriétés vue se généralisent au cas général et nous les appliquerons à un exemple particulier.
Soit I un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ contenant les x_0, x_1 ..., x_n.

1. On suppose que $n = 1$ pour cette question. Soit F la fonction de I dans $\mathbb{R}$: $x \mapsto f[x_0, x]$.
   (a) Quel est le domaine de définition de F ?
   (b) Étude de F au voisinage de x_0.
   On suppose désormais que f est dérivable sur I.
   F admet-elle une limite en x_0 ? Quelle est cette limite ? On la note $f[x_0, x_0]$; pourquoi ?
   (c) Montrer que l'on vient de donner un sens à l'expression $f[x_0, x]$ pour tout x de I.
   (d) Montrer
   $$\forall x, \quad f[x_0, x] = f[x, x_0]. \tag{1}$$
   (e) (i) Montrer que, pour tout support $\{x_0, x_1\}$, f admet un polynôme d'interpolation p_1, que l'on cherchera sous la forme
   $$p_1(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0), \tag{2}$$
   où $f[x_0, x_1]$ a été défini précédemment.
   (ii) Quelles sont ses propriétés lorsque $x_0 = x_1$?
   Nous admettrons son unicité.
2. On suppose $n = 2$ dans cette question.
   (a) On considère deux éléments distincts de I, notés x_0 et x_2. Soit G la fonction de I dans $\mathbb{R}$: $x \mapsto f[x_0, x, x_2]$

(i) Quel est le domaine de définition de G ?

(ii) Étude de G au voisinage de x_0.
G admet-elle une limite au voisinage de x_0. Quelle est-elle ? On la note $f[x_0, x_0, x_2]$; pourquoi ?

(iii) Étudier G au voisinage de x_2.

(iv) En déduire qu'on a donné un sens aux expressions $f[x_0, x_0, x_2]$ et $f[x_0, x_2, x_2]$.

(b) Soit K de I dans $\mathbb{R}$: $x \mapsto f[x_0, x_0, x]$.

(i) Quel est le domaine de définition de K ?

(ii) Étude au voisinage de x_0.
On suppose désormais que f est deux fois dérivable sur I.
K admet-elle une limite en x_0 ? Quelle est cette limite ? On la note $f[x_0, x_0, x_0]$; pourquoi ?

(c) Bilan
Fournir une définition générale de $f[x_0, x_1, x_2]$ quel que soit le support.

(d) (i) Montrer que, pour tout support $\{x_0, x_1, x_2\}$, f admet un polynôme d'interpolation p_2, que l'on cherchera sous la forme

$$p_2(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1), \tag{3}$$

où $f[x_0, x_1]$ et $f[x_0, x_1, x_2]$ ont été définis précédemment.

(ii) Quelles sont ses propriétés lorsqu'un point du support est multiple ?

(iii) Nous admettrons l'unicité.

3. Nous admettons que, moyennant l'extension qui vient d'être faire, on peut définir les différences divisées et le polynômes sur tout support d'interpolation $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ si $x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_{n-1} \leq x_n$. La propriété usuelle de récurrence sur les différences divisées vue en cours est encore vraie.
   Soit la fonction $f : x \mapsto e^x$ et le support $\{1, 1, 1, 2\}$.
   (a) Déterminer les différences divisées $f[1]$, $f[1, 1]$, $f[1, 1, 1]$ et $f[1, 1, 1, 2]$.
   On formera le tableau des différences divisées dans son intégralité.
   (b) Déterminer le polynôme d'interpolation p_3 de f sur le support de points étudié et donner la valeur de $p_3''(1)$ et de $p_3(1.5)$.

Exercice 2 (Intégration)**.**
On considère l'intégrale suivante

$$I = \int_0^1 \sin x dx.$$

1. En utilisant la formule d'intégration (composée) du point milieu à N sous intervalles déterminer la valeur approchée de I pour $N \in \{2, 3, 4\}$.
2. Comparer avec la formule exacte.

Exercice 3 (Équations non linéaires).
Cet exercice ne sera traité que le si le chapitre correspondant aura été vu en cours et en TD.
On cherche à résoudre $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[a, b]$ avec

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \cos x - x,$$

et $[a, b] = [0, 1]$.
Déterminer les 7 premières valeurs des milieux x_n de la méthode de dichotomie sur $[a, b]$.

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur `http://utbmjb.chez.tiscali.fr/`