MT40 Automne 2005

# Corrigé de l'examen de TD(2) du 29 novembre 2005

Le corrigé est succinct, mais on pourra consulter les corrigés matlab proposés en ligne à l'adresse habituelle `http://utbmjb.chez.tiscali.fr/`
On pourra aussi consulter et faire tourner les fichiers matlab `diff_div`, `eval_horner`, `int_fcn` et `iteration_dichotomie`.

**Correction de l'exercice 1.**
La correction des questions 1 et 2 n'est pas rédigée. On pourra consulter la correction de l'exercice 2.8 ainsi que le TP 2F de [BM03].
(disponible sur le site de Dunod).

1.
2.
3. (a) Nous noterons $f^{[i]}$ les différences divisées d'ordre $i$ (c'est-à-dire $f^{[0]} = f[.]$, $f^{[1]} = f[.,.]$, $f^{[2]} = f[.,.,.]$, $f^{[3]} = f[.,.,.,.]$). Nous avons fait les calculs en ne retenant que quatre chiffres[1].
Avec les notations précédentes $x_0 = x_1 = x_2 = 1$, et $x_3 = 2$.
Il vient d'après les propriétés vues

$$f[x_0] = f(x_0) = e^1 \approx 2.718,$$
$$f[x_0, x_1] = f[x_0, x_0] = f'(x_0) = e^1 \approx 2.718,$$
$$f[x_0, x_1, x_2] = f[x_0, x_0, x_0] = \frac{1}{2}f''(x_0) = \frac{1}{2}e^1 \approx 1.359,$$
$$f[x_3] = f(x_3) = e^2 \approx 7.3890.$$

On en déduit par exemple

$$f[x_2, x_3] = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = \frac{f(x_3) - f(x_0)}{x_3 - x_0} = 4.670.$$

On remplit successivement la table et on obtient les valeurs des différences divisées dans le tableau 1.

[1] Attention, ici nous ne disons pas que les calculs sont fait avec quatre chiffres significatifs, puisque les nombres donnés en solution n'ont pas le format de nombre flottant.

| $x$ | $f^{[0]}$ | $f^{[1]}$ | $f^{[2]}$ | $f^{[3]}$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_0 = 1$ | **2.718** | | | |
| | | **2.718** | | |
| $x_1 = 1$ | 2.718 | | **1.359** | |
| | | 2.718 | | **0.593** |
| $x_2 = 1$ | 2.718 | | 1.952 | |
| | | 4.670 | | |
| $x_3 = 2$ | 7.389 | | | |

TAB. 1 – Différences divisées correspondant à l'interpolation de la fonction $f : x \mapsto e^x$ sur le support $\{1, 1, 1, 2\}$

(b) On utilisant la diagonale descendante (en gras), on en déduit le polynôme $p_3$ d'interpolation sous la forme de Newton :

$$\boxed{p_3(x) = 2.718 + 2.718(x-1) + 1.359(x-1)^2 + 0.593(x-1)^3.} \tag{1}$$

On sait que, puisque le point $x_1$ est répété deux fois, on a

$$\boxed{p_3''(1) = f''(1) = 2.718} \tag{2}$$

Après calculs, on a

$$\boxed{p_3(1.5) = 4.491.} \tag{3}$$

**Correction de l'exercice 2.** Soit

$$I = \int_0^1 \sin x dx.$$

1. En utilisant la formule d'intégration (composée) du point milieu à $N$ sous intervalles ($x_i = A + ih$, $A = 0$, $B = 1$ et $h = (B - A)/N$) :

$$I_N^M = h \sum_{i=0}^{N-1} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right),$$

nous trouvons

$$I_2^M = 4.64521359638928 \times 10^{-1},$$
$$I_3^M = 4.61832841497885 \times 10^{-1},$$
$$I_4^M = 4.60897009411941 \times 10^{-1}.$$

2. la valeur exacte vaut $I = 1 - \cos 1$ et on obtient donc

$$\left|I - I_2^M\right| \approx 4.8236 \times 10^{-3},$$
$$\left|I - I_3^M\right| \approx 2.1351 \times 10^{-3},$$
$$\left|I - I_4^M\right| \approx 1.1993 \times 10^{-3}.$$

**Correction de l'exercice 3.**
Nous donnons dans le tableau 2, les valeurs de $x_n$ pour $n \in \{0, ..., 6\}$.

| $n$ | $x_n$ |
|---|---|
| 0 | 0.5 |
| 1 | 0.75 |
| 2 | 0.625 |
| 3 | 0.6875 |
| 4 | 0.71875 |
| 5 | 0.734375 |
| 6 | 0.7421875 |

TAB. 2 – Les valeurs de $x_n$ pour $n \in \{0, ..., 6\}$.

## Références

[BM03] Jérôme Bastien et Jean-Noël Martin. *Introduction à l'analyse numérique ; applications sous matlab*. Dunod, Paris, 2003.